Noter til signalanalyse

Jens Damgaard Andersen

12. januar 2004
Forord


J.D.A.
Kapitel 1
Lineære forskydningsinvariante systemer

Ved mange naturvidenskabelige og tekniske anvendelser ønsker man at kunne simulere et system på datamaskine, d.v.s. konstruere en model for systemet, således at man er i stand til at analysere systemets egenskaber og opfølge. Man vil således gerne kunne forudsige systemets svar på ydre påvirkninger. Dette illustreres ofte på diagramform ved at tegne systemet som en kasse (‘a black box’), hvis indhold principielt er ukendt. Ikke desto mindre er det muligt at karakterisere systemets svar på ydre påvirkninger under visse antagelser om systemets opfølge. Påvirkningen på systemet betegnes systemets input eller indgangssignal, og systemets svar dets output, systemsvar eller udgangssignal. Dette er illustreret på figur 1.1(a), hvor $x(t)$ betegner input og $y(t)$ output. Denne måde at modellere systemer på finder udstrakt anvendelse indenfor en række fagområder. Man kan nævne kommunikation, datanet, musik- og taleanalyse, rumforsknings, kredsløbsanalyse, akustik, seismisk analyse, medikoteknik, kemisk proceskontrol, billedanalyse og mange andre felter. Også indenfor helt andre områder end naturvidenskab som f.eks. ved finansiel analyse kan man benytte metoderne, bl.a. ved tidsrækkeanalyse af varierende størrelser som aktiekurser og andre økonomiske parametre.

\[
\begin{align*}
x(t) & \rightarrow \text{Kontinuert system} \rightarrow y(t) \\
x[n] & \rightarrow \text{Diskret system} \rightarrow y[n]
\end{align*}
\]

Figur 1.1: (a) kontinuert system (b) diskret system
Figur 1.2: Grafisk fremstilling af (a) kontinuerligt og (b) diskret signal

1.1 Kontinuerlige og diskrete systemer


Figur 1.3: (a) Et diskret signal $x[n]$ og (b) dets spejling $x[-n]$ omkring aksen $n = 0$

men i teorien forstiller man sig de enkelte sampleværdier som reelle tal, og i teorien tager man ikke højde for den afrundingsfejl, der er resultatet af den endelige ordlængde. Man skelner derfor terminologimæssigt mellem *digitale signaler* (endelig ordlængde) og *diskrete signaler* (samplede signalværdier, der er reelle tal).

En særlig klasse af systemer, de *lineære forskydningsinvariante systemer* LFI-systemer (engelsk: linear shift invariant, LSI-systems) er vigtig og meget ofte benyttet som model for systemer. Dette skyldes især

- Mange systemer, der optræder i virkeligheden, som f.eks. fysiske, kemiske, mekaniske og optiske systemer, kan med god nøjagtighed modelleres som lineære forskydnings-invariante systemer.

- Teorien for disse systemer er simpel i modsætning til teorien for ikke-lineære systemer.

En af de egenskaber ved lineære systemer, der gør dem lette at analysere, er gyldigheden af det såkaldte *superpositionsprincipe*: kendetegner systemets svar på givne stimuli (påvirkninger) og benyttes som input en linearkombination af disse stimuli, vil systemets svar blive linearkombinationen af de tilhørende systemsvar.

I de næste afsnit vil teorien for lineære forskydningsinvariante systemer blive gennemgået. Men først vil vi betragte notationen for og nogle egenskaber ved *signaler*.
Figur 1.4: (a) Et kontinuert signal $x(t)$ og (b) dets spejling $x(-t)$ omkring aksen $t = 0$

1.2 Signaler

Betegnelsen *signal* bruges for en meget stor klasse af fysiske fænomener, der kan beskrives som en funktion med tiden eller afstand i rummet som den uafhængige variable. Eksempler på signaler er lydsignaler optaget ved hjælp af en mikrofon, signaler fra transducerer, der overvæger en kemisk proces, eller den tidsmæssige fluktuation af en eller anden parameter, f.eks. vekselkursen på Euro i danske kr. Man opererer også med *fjerdimensionale* *signaler*. Et eksempel på et to-dimensionalt signal er et monokromatisk billede, hvor forskydnin i planen træder i stedet for tiden. Medens lydsignalet har en *temporal* parameter (tiden), har billedet en *spatial* (rumlig parameter). Man kan også have signaler med både temporale og spatiale parametre; et eksempel på et fjerdimensionalt signal med 3 spatiale og en temporal parameter er et signal bestående af en tredimensionale magnetisk resonansoptagelse af et hjerte, der pumper blod.

Vi har tidligere omtalt, at der er to grundlæggende typer signaler, kontinuerde signaler, og diskrete signaler. For kontinuerte signaler’s vedkommende er den uafhængige variable kontinueret, og denne type signal er defineret for et kontinuum af værdier af den uafhængige variable. I modsætning hertil er diskrete signaler kun definerede for diskrete værdier af den uafhængige variable, f.eks. til diskrete tidspunkter eller i punkter i rummet. Den uafhængige variable antager kun et diskret sæt værdier. Eksempler på kontinuerttidssignaler er et talesignal og atmosfæretrykket ved DMI. Eksempler på diskrettidssignaler er Dow Jones aktieindex og det signal, der er indspillet på en CD.

For at skelne mellem kontinuerte signaler og diskrete signaler bruges bogstavet $t$ til at betegne kontinuerttidsvariablen (de fleste kontinuerde systemer har tiden som uafhængig variabel) og $n$ for den diskrete variable. Desuden vil vi skrive den kontinuerede variabel i
rund parentes (·) og den diskrete variabel i en kantet parentes [·] (hvilket minder om notationen for et array). Figur 1.2 (a) viser den grafiske fremstilling af et kontinuert signal $x(t)$ og fig 1.2 (b) et diskret signal $x[n]$. Det er vigtigt at bemærke, at det diskrete signale $x[n]$ er kun defineret for heltallige værdier af den uafhængige variabel, hvilket den grafiske fremstilling for $x[n]$ også understreger. Desuden bruger man også ofte betegnelsen en diskret følge om $x[n]$, idet signalet kan opfattes som et række tal, en talfølge. Et diskret signal kan være fremkommet af et kontinuert signal ved sampling (stikprøvetagning), Dette er tilfældet for signalet indspillet på en Compact Disc: det er i virkeligheden et kontinuert tidssignal (lydsignal), der er aftastet (samplet) med frekvensen 44,1 kHz, d.v.s. (stereo-)lydsignalet er aftastet 44100 gange i sekundet. Et eksempel på et todimensional samplet signal er et avisbillede: det er en rasteriseret udgave af et spatialt kontinuert signal, nemlig lysintensiteten, der rammer kameraets billedplan ved optagelsen.

I disse noter behandles kontinuerte og diskrete signaler hver for sig, men i parallell, således at man kan udnytte den indsig, man har fået i den ene type ved forståelsen af den anden type. Der er nemlig meget store ligheder mellem kontinuerte og diskrete systemer og signaler. Desuden konvergerer de to teorier, når vi frembringer et diskret signal ved sampling af et kontinuert signal.

1.2.1 Notation og signaltransformationer

Signalanalyse er opstået som en ingeniørægtig disciplin og notationen er beregnet på praktiske anvendelser og kan derfor forekomme at mangle en nødvendig matematiskt strenghed. Et eksempel: $x[n]$ kan betyde et diskret signal (opfattet som en helhed. d.v.s. hele talfølgen) eller talfølgens værdi svarende til argumentværdien $n$. Desuden er det sædvané
Figur 1.6: Diskrettidssignaler relaterede ved tidsforskydning

at anvendelse af operationer på signaler, f.eks. tidsforskydning, spejling o.s.v., noteres i signalets argument, hvor det matematisk korrekte ville være anvendelsen af et operatorsymbol. Et eksempel: hvis signalet $h(t)$ forskydes stykket $a$ i tid, noteres resultatet som $h(t-a)$. En mere rigoristisk notation ville være at specificere en translationsoperator $\tau$ med en værdi svarende til translationen $a$, d.v.s.

$$\tau(a)h(t) = h(t-a).$$  \hspace{1cm} (1.1)

Hvis $\tau$ betegner den generelle translationsoperator, så er $\tau(a)$ operatoren, der translaterer stykket $a$. At signalet $x$ translateres stykket $a$ kan så skrives $\tau(a)(x)$ og funktionsværdien af den $a$-translaterede $x$-funktion taget til tiden $t_0$ kan skrives $\tau(a)(x)(t_0)$ Denne notation er imidlertid besværlig at bruge og anvendes ikke i praksis. Af hensyn til dette kursus ‘kompatibilitet’ med den eksisterende litteratur vil der også her blive brugt den mest udbredte (men mindre strenge) notation. Man kan da være nødt til ud fra sammenhængen at afgøre, f.eks. om der menes signalet som helhed eller en specifik funktionsværdi.

I mange situationer er det vigtigt at betragte signaler, der er relaterede ved en modifikation af den uafhængige variabel. F. eks. er signalet $x[-n]$ vist på figur 1.3, fremkomm med at spejle signalet $x[n]$ omkring akseen $n = 0$. Man kan opfatte $x[-n]$ som givet ved den sammensatte funktion $x[-1 \cdot [n]] = x[n]$. Tilsvarende som vist på figur 1.4 kan man få signalet $x(-t)$ ved spejling af $x(t)$ omkring akseen $t = 0$. Hvis $x(t)$ repræsenterer et lydsignal på et bånd, svarer $x(-t)$ til det signal, man får, hvis man afspiller båndet baglæns. Fig. 1.5 viser tre signaler, $x(t), x(2t)$ og $x(t/2)$ som svarer til hinanden ved en lineær skalaændring i den uafhængige variable. Hvis vi tænker på et båndindspillet signal,
Figur 1.7: (a) Et lige kontinuerligt signal (b) et ulige kontinuerligt signal

Figur 1.8: Kontinuerligt periodisk signal

svarer $x(2t)$ til det, man hører, hvis båndet afspilles med dobbelt hastighed, og $x(t/2)$ til afspilning med halv hastighed.

Endnu et eksempel på en transformation af den uafhængige variabel er vist på figur 1.6, der viser to signaler, $x[n]$ og $x[n-n_0]$ som er identiske i form, men hvor det ene signal er en tidsforskudt udgave af det andet signal. Tilsvarende repræsenterer $x(t-t_0)$ en tidsforskudt udgave af $x(t)$. Signaler, der er indbyrdes relaterede ved tidsforskylning, ses ofte i fysiske systemer, f.eks. ved sonar, radar og seismiske undersøgelser, hvor et modtaget reflektort signal er en forsinket udgave af det udsendte signal, idet forsinkelsen fremkommer ved at signalet propagerer (udbredes) gennem et medium (jord, luft, vand). Transformationer af signaler kan også foretages med henblik på at undersøge, hvordan systemer reagerer på den transformerede udgave af signalet.

Et signal kaldes lige, hvis det er identisk med sin spejling omkring den lodrette akse, d.v.s. (for et kontinuerligt signal):

$$x(-t) = x(t)$$
og for et diskret signal

\[ x[-n] = x[n]. \]

Et signal kaldes *ulige* hvis

\[
\begin{align*}
x(-t) &= -x(t) \\
x[-n] &= -x[n],
\end{align*}
\]

hvilket svarer til, at spejling omkring koordinatsystemets begyndelsespunkt ikke ændrer signalet.

Det er vigtigt at bemærke, at ethvert signal kan dekomponeres (opsplittes) i en lige og ulige kænket (del). Dette ses ved at danne

\[
\mathcal{E}[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]
\]

hvilket kaldes \( x(t) \)'s lige del. Tilsvarende er \( x(t) \)'s *ulige del* givet ved

\[
\mathcal{O}[x(t)] = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]
\]

Det er enkelt at see, at ‘den lige del’ faktisk er lige, ‘den ulige del’ er ulige, og at \( x(t) \) er summen af de to. En nøjagtig tilsvarende definition findes for diskrete signaler og et eksempel på dekomposition af et diskret signal er vist i figur 1.7.

Endnu en klasse af signaler, man bør kende, er de *periodiske* signaler, både kontinuerlige og diskrete. Et periodisk kontinuerligt signal \( x(t) \) har den egenskab, at der findes en positiv værdi af \( T \) for hvilken

\[
x(t) = x(t + T) \quad \text{for alle } t
\]

I dette tilfælde siges \( x(t) \) er periodisk med perioden \( T \). Et eksempel på et sådant signal er vist på fig 1.8. Fra figuren eller fra ligning (1.2) kan man slutte, at dersom \( x(t) \) er periodisk med perioden \( T \), så er \( x(t) = x(t + mT) \) for alle \( t \) og ethvert heltal \( m \). \( x(t) \) er derfor også periodisk med perioden \( 2T, 3T, 4T, \ldots \). Grundperioden (fundamentalperioden) \( T_0 \) for \( x(t) \) er den mindste positive værdi af \( T \) for hvilken (1.2) gælder. Bemærk, at denne definition af grundperioden forudsætter, at \( x(t) \) ikke er konstant. I dette tilfælde er grundperioden udefineret, da \( x(t) \) er periodisk for ethvert valg af \( T \), således at der ikke er en mindste værdi. Endelig benævnes et signal, der ikke er periodisk, et *aperiodisk* signal.

Periodiske diskrete signaler defineres på samme måde. Mere præcist, så er et diskret signal \( x[n] \) periodisk med perioden \( N \), hvor \( N \) er et positivt heltal, hvis

\[
x[n] = x[n + N] \quad \text{for alle } n
\]

Hvis ligning (1.3) er opfyldt, så er \( x[n] \) også periodisk med perioden \( 2N, 3N, \ldots \), og *grundperioden* \( N_0 \) er den mindste positive værdi af \( N \) for hvilken ligning (1.3) er opfyldt.
1.3 Systemers egenskaber


**Indre tilstande.** Et system er uden indre tilstande, hvis dets output udelukkende afhænger af det øjeblikkelige input og er uafhængig af forhistorien. Hvis systemets output derimod er et resultat af det øjeblikkelige input i kombination med tidligere input, siges systemet at ‘have indre tilstande’. Indenfor datamatarkitektur svarer den første type til et kombinatorisk netværk og den sidste til en tilstandsmaskine. Betragter man et kontinuerligt system, f.eks. et analogt elektrisk kredsløb, så er et system, der udelukkende indeholder modstande, af den første type. Et system, der indeholder kondensatorer, kan levere output, der er afhængig af tidligere input (fordi kondensatorer kan lades op og senere afgive denne ladning) og er af den sidste type. Et særligt simpelt tilstandsloset system er *identitetssystemet* beskrevet ved input-output relationen

\[ y(t) = x(t) \]

og det tilsvarende diskrete system

\[ y[n] = x[n] \]

Et eksempel på et system med indre tilstande er systemet beskrevet ved

\[ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \]  \hspace{1cm} (1.4)

Dette system indeholder for en given indeksværdi \( n \) summen af alle inputværdier fra \( -\infty \) til det aktuelle indeks. Et andet eksempel er

\[ y(t) = x(t - 1), \]

der et system, der forsinket input én tidsenhed.

**Invertibilitet og inverse systemer.** Et system siges at være invertibelt, hvis man kan bestemme dets input ud fra observation af output. D.v.s. at det er muligt at konstruere et inverset system, som, hvis det sættes i serie med det oprindelige system, giver et output \( z[n] \) som er lig det oprindelige input \( x[n] \). Et eksempel på et invertibelt kontinuerligt system er

\[ y(t) = 2x(t) \]

for hvilket det inverse system er

\[ y(t) = \frac{1}{2} x(t) \]
Et andet eksempel er det diskrete system defineret i ligning 1.4. For dette systems vedkommende giver forskellen mellem to på hinanden følgende outputværdier netop den sidste inputværdi. Følgelig er det inverse system i dette tilfælde

\[ z[n] = y[n] - y[n - 1] \]

Eksempler på ikke-invertible systemer er

\[ y[n] = 0 \]

(det system der giver nul for enhvert inputsignal) og

\[ y(t) = x^2(t) \]

Kausalitet. Et system siges at være kausal, hvis output til ethvert tidspunkt kun afhænger af det nuværende og tidligere input. Systemet kaldes også ‘ikke-anticiperende’, fordi det ikke kan foregribe fremtidige inputværdier (skue ud i fremtiden). Selv om kausale systemer er af stør betydning, kan man også komme ud for at skulle operere med ikke-kausale systemer. Et eksempel er behandling af data, som ikke kommer direkte ind i et system, men som er lagret på et pladelager, således at man kan udnymte inputværdier efter et tidspunkt \( t_0 \) eller \( t[n] \) ved beregningen af output til dette tidspunkt. Ligeledes kan man komme ud for nonkausale systemer ved billedbehandling, hvor den uafhængige variable ikke er tiden, men rumkoordinater. Et fysisk system, hvor den uafhængige variable er tiden, modelleres derimod almindelighvis kausal. Det giver ingen mening at modellere en bilis bevægelse som et nonkausalt system, idet bilen jo ikke kan forudse førerens fremtidige handlinger.

Stabilitet. Et system er stabilt, hvis output er begrænset, når input er begrænset. Betragt f.eks. systemet

\[ y[n] = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^{k=M} x[n - k] \]  (1.5)

Antag, at input er begrænset i størrelse til f.eks. \( K \). Det er da at se, at \( y[n] \) da aldrig kommer over \( K \), fordi \( y[n] \) er middelværdien af et endeligt antal inputværdier. Derfor er \( y[n] \) også begrænset og systemet er dermed stabilt. Denne stabilitetsbetingelse kaldes også ‘Bounded-Input Bounded-output’ (BIBO) stabilitetsreglen. Et eksempel på et system, der ikke er stabilt, er systemet defineret ved ligning 1.4. Dette system summerer alle inputværdier og vil divergere på begrænsede inputsekvenser.

Forskydningsinvarianst. Et system er forskydningsinvariant, hvis en forskygning af inputsignalen giver anledning til en tilsvarende forskygning af output. For et system, hvor input og output er givet som tidsfunktioner, er systemet tidsinvariant, hvis en tidsforskygning af inputsignalen forårsager en tilsvarende forskygning af output. For eksempel, for et diskret system, hvis \( y[n] \) er systemets svar på \( x[n] \), vil systemet svare med \( y[n - a] \) på \( x[n - a] \). En tidsforskygning af inputsignalen modvares med andre ord af en tilsvarende forskygning af outputsignalen. Et eksempel på et system, der ikke er tidsinvariant, er \( y[n] = nx[n] \). Dette systems svar afhænger af tiden (index \( n \)).
Linearitet. Et lineært system (kontinuert eller diskret) er et system, somvirker som et superpositionssystem: Hvis input til systemet består af en vægtet sum af flere signaler, så er output lig superpositionen, d.v.s. den samme vægtede sum af systemets svar på hvert enkelt signal. Mere præcist, hvis \( y_1(t) \) er et kontinuert systems svar på \( x_1(t) \) og tilsvarende \( y_2(t) \) systemets svar på \( x_2(t) \), så er systemet lineært, hvis

1. Svaret på \( x_1(t) + x_2(t) \) er \( y_1(t) + y_2(t) \).
2. Svaret på \( ax_1(t) \) er \( ay_1(t) \), hvor \( a \) er en vilkårlig kompleks konstant.

Den første af de to egenskaber kalder det lineære systems additivitetsegenskab. Den anden kalder skalering- eller homogenitetsegenskaben. Skønt definitionen her er givet for kontinuerligtidsystemer, gælder en tilsvarande for diskrete systemer. Bemærk, at et system kan være lineært uden at være tidsinvariant; det er f.eks. tilfældet for systemet \( y[n] = nx[n] \), og det kan være tidsinvariant uden at være lineært, som \( y(t) = \sin[x(t)] \) og \( y(t) = x^2(t) \). De to egenskaber, der definerer et lineært system, kan kombineres til én samlet egenskab, der f.eks. for diskrete systemer lyder:

\[
ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]
\]

hvor pilen \( \rightarrow \) læses "giver out puttet" og hvor \( a \) og \( b \) er vilkårlige komplekse konstanter. Tilsvarende for et vilkårligt antal superponerede signaler

\[
x[n] = \sum_k a_kx_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_k a_ky_k[n]
\]

Lineære systemer har en anden vigtig egenskab, nemlig at null input giver null output. For eksempel, hvis \( x[n] \rightarrow y[n] \) så giver skaleringsegenskaben

\[
0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0
\]

Systemet

\[
y[n] = 2x[n] + 3
\]

er ikke lineært, idet \( y[n] = 3 \) for \( x[n] = 0 \). Dette kan synes overraskende, da ligning (1.6) er en lineær ligning, men systemet overholder ikke nul-ind/nul-ud egenskaben for lineære systemer.

1.4 Signaldekomposition og foldning

Man kan benytte superpositionspcincipippet til at finde et vilkårligt LFI-systems svar på et givet indgangssignal. Metoden er, at opsplitle (dekomponere) inputsignalet i en række elementarsignaler af en sådan karakter, at man let kan bestemme systemets svar på dem. Et vigtigt elementarsignal er deltafunktionen \( \delta \). Først betragtes deltafunktionen \( \delta(t) \) for konstnørte systemer.
**Kontinuerte systemer: deltafunksjonen.** Dirac's 'delta funktion' \(\delta(t)\) er egentlig ikke en funktion, men tilhører klassen af 'generaliserede funktioner', som har egenskaben
\[
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\,dt = x(0)
\]  
(1.7)
for ethvert passende kontinuerligt signal \(x(t)\). Ingen sædvanlig funktion har egenskaben (1.7), men man kan forestille sig en følge af funktioner, som har stadig højere og smøllere toppe for \(t = 0\), medens arealet under kurven forbliver 1, samtidig med at funktionens værdi går mod 0 i ethvert punkt, undtagen for \(t = 0\), hvor den går mod uendelig. I grænse vil denne funktionsfølge da have de omtalte egenskaber.

Et eksempel på en funktionsfølge med disse egenskaber er \(\delta_n(t) = \sqrt{n}e^{-nt^2}\), der definerer en generaliseret funktion \(\delta(t)\) således at
\[
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)\,dt = x(0)
\]
(1.8)

Figur 1.9 viser eksempler på funktioner i funktionsfølgen, der bruges til at definere \(\delta(t)\).

Det er også muligt at 'differentiere' \(\delta(t)\), hvorved man får en funktion \(\delta'(t)\) med egenskaben
\[
\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x'(t)\,dt = -x'(0)
\]
(1.9)
for enhver kontinuerligt differentiabel funktion \(x(t)\). Opførsel som (1.9) kan som før fælles som grænse af en funktionsfølge. For eksempel de afledte funktioner fra den følge, der bruges til at repræsentere \(\delta(t)\); disse er grafisk vist på figur 1.10.

Man kan tilsvarende integrere \(\delta(t)\). Idet det løbende integral (dets bestemte integral, hvis øvre grænse er \(t\)) betegnes \(u(t)\) finder man:
\[
u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau,
\]
(1.10)
der betegnes Heavisides enhedstrinfunktions (the unit step function) givet ved
\[
u(t) = \begin{cases} 
0, & t < 0 \\
\text{udefineret}, & t = 0 \\
1, & t > 0
\end{cases}
\]  
(1.11)

Bemærk, at der er en diskontinuitet for \(t = 0\). Igen vil vi her betragte enhedstrinfunktionen som resultatet af en grænseovergang for \(n \rightarrow \infty\) ved
\[
u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{t} \delta_n(\tau)\,d\tau,
\]
(1.12)

\(u_n(t)\) er vist på figur 1.11 for \(n = 4, 20\) og 100. Hvis man ønsker en matematisk rigoristisk fremstilling af teorien for deltafunktioner, henvises til: M.J. Lighthill: *Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press 1958.
Figur 1.9: Funktioner i funktionsfølgen $\delta_n(t)$, der kan bruges til at definere deltafunktionen $\delta(t)$ med vist for $n = 100, 20$ og $4$. Jo større $n$, desto smallere og højere impuls.

Da arealet af impulsen $\delta(\tau)$ er koncentreret ved $\tau = 0$, er det løbende integral 0 for $t < 0$ og 1 for $t > 0$. Desuden kan sammenhængen i ligning (1.10) mellem enhedsimpulsen og enhedstrinnet skrives på en anden form ved variabelsubstitutionen $\sigma = t - \tau$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \sigma)(-d\sigma) = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma$$  \hspace{1cm} (1.13)

I dette tilfælde er arealet af $\delta(\tau - \sigma)$ koncentreret i punktet $\sigma = t$, således at integralet som for er 0 for $t < 0$ og 1 for $t > 0$.

Skønt denne gennemgang af enhedsimpulsen er uformel, er den tilstrækkelig for vort nuværende formål og tjener til at give intuition vedrørende dette signals egenskaber. For eksempel er det vigtigt at betragte produktet af en impulsfunktion og en ’pæn’ kontinuert tidsfunktion. Fortolkningen af produktet kan baseres på definitionen af $\delta(t)$ som
Figur 1.10: Funktionsfølgen $\delta_n'(t)$ (de afledte af $\delta_n(t)$) for $n = 100, 20, og 4$

\[\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(t), \text{ d.v.s. man betragter } x_1(t) \text{ givet ved }\]

\[x_1(t) = x(t) \delta_n(t) \quad (1.14)\]

For et tilstrækkeligt stort $n$, således at $x(t)$ tilmærkelsesvis er konstant over det interval, hvor $\delta_n(t)$ er ‘væsentlig forskellig fra nul’, er

\[x(t) \delta_n(t) \sim x(0) \delta_n(t) \quad (1.15)\]

$\delta(t)$ er grænseværdien for $\delta_n(t)$ når $n \to \infty$. I grænsen er impulsen ‘uendelig smal’ og ‘uendelig høj’, men bevarer arealet 1. Et integral af produktet af $\delta(t)$ og en funktion $x(t)$, vil, når integrationen inkluderer $t = 0$, give funktionsværdien af $x(t)$ for $t = 0$, d.v.s.

\[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0). \quad (1.16)\]
Figur 1.11: Det løbende integral $u_n(t)$ af funktionsfølgen $\delta_n(t)$ for $n = 4, n = 20$ og $n = 100$ vist ovenfra og nedenunder. Bemærk, at $u_n$ nærmer sig enhedstrinfunktionen for $n \to \infty$

Deltafunktionens egenskaber kan illustreres ved en udregning af integralet af $\delta_n(t)$ og af $\delta_n(t) \cos(t)$. I tabel 1.1 er vist en beregning af disse integraler udregnet fra -1 til 1 med en inddeling på 200 punkter ved hjælp af Simpson's formel. Man ser, at for $n = 100$ nærmer $\int \cos(t)\delta_n(t)\,dt$ sig til den sande værdi 1.

Et tilsvarende udtryk fås for en impuls koncentreret i et vilkårligt andet punkt, f.eks. $t_0$. D.v.s.

$$\int_a^b x(t)\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0),$$

såfremt integrationen strækker sig hen over $t = t_0$. Et numerisk eksempel udregnet ved hjælp af tilnærmelsen $\delta_{100}(t)$: $\cos(0.5) = 0.8776$. Ved integration findes $\int \cos(t)\delta_{100}(t - 0.5)\,dt = 0.8754$.

Man har altså

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)\,d\tau.$$
Tabel 1.1: Illustration af integration af produkt af en tilnærmelse til deltafunktionen og en differentiabel funktion (cos(t))

<table>
<thead>
<tr>
<th>n</th>
<th>$\int_{-1}^{1} \delta_n(t) dt$</th>
<th>$\int_{-1}^{1} \cos(t) \cdot \delta_n(t) dt$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>n = 4</td>
<td>0.9953</td>
<td>0.9373</td>
</tr>
<tr>
<td>n = 20</td>
<td>1.0000</td>
<td>0.9876</td>
</tr>
<tr>
<td>n = 100</td>
<td>1.0000</td>
<td>0.9975</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Enhedsimpulsen i positionen $\tau = t$ har derfor egenskaben, at den under integration plukker funktionsværdien af $x(\tau)$ ud for $\tau = t$. Ligning (1.18) definerer det, der kaldes kontinuertidss deltafunktionens $\delta$-egenskab (engl.: sifting property).

Man kan også intuitivt tænke på ligning (1.18) som definerende $x(t)$ som en “sum” af vægte forskudte impulser, hvor impulsen $\delta(t-\tau)$ har vægten $x(\tau)d\tau$.

I almindelighed, hvis et systemets svar på en deltaimpuls til tidspunktet $\tau = h_\tau(t)$ som skal vægtes med inputsignalet til tiden $t$, $x(t)$, er systemets svar

$$ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau. \quad (1.19) $$

Med denne fortolkning repræsentere ligning (1.19) simpelthen superpositionen af svarene på hver af disse input, og, på grund af lineariteten er vægten af svaret på den forskudte impuls $\delta(t-\tau)$ $x(\tau)d\tau$. Ligningen (1.19) repræsenterer den generelle form for et lineært kontinuertidssystemets svar. Hvis systemet ud over at være lineært også er tidsinvariant (eller i almindelighed, forskydningsinvariant) så er $h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$, og hvis index 0 bortkastes og vi definerer systemets $\textit{enhedsimpulssvar}$ som

$$ h(t) = h_0(t) \quad (1.20) $$

bliver ligning (1.19)

$$ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (1.21) $$

Denne vigtige ligning benævnes $\textit{foldningsintegral}$ eller $\textit{superpositionsintegral}$ og definerer et kontinuertidssystems svar ud fra dets svar på en enhedsimpuls. Foldningen af de to signaler $x(t)$ og $h(t)$ skrives symbolisk således

$$ y(t) = x \ast h(t) \quad (1.22) $$

**Diskrete systemer: deltafunktionen.** Analogien til trinsfunktionen i kontinuerede systemer er det diskrete enhedstrinnet, der betegnes $u[n]$ og defineres ved

$$ u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.23) $$

Et andet vigtigt diskret signal er $\textit{enhedsimpulsen}$ defineret ved

$$ \delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.24) $$
Den diskrete enhedsimpulse har mange egenskaber, der ligner egenskaber ved den kontinuerte enhedsimpuls. For eksempel idet \( \delta[n] \) kun er forskellig fra nul (og lig 1) for \( n = 0 \). Det ses umiddelbart, at

\[
x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]
\]

Ligesom den kontinuerte impuls er den første afledede af det kontinuerte enhedstrinnet, så er den diskrete impulsen \( fôrstedifferenzen \) af det diskrete trin

\[
\delta[n] = u[n] - u[n - 1]
\]

Sværende til, at det kontinuerte enhedstrin er det løbende integral af \( \delta(t) \), er det diskrete enhedstrin den løbende sum af enhedsimpulsen:

\[
u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]
\]

**Foldningssummen.** Hvis man betragter et diskret lineært system og et vilkårligt input \( x[n] \) til systemet, kan man udtrykke \( x[n] \) som en linearkombination af forskudte diskrete enhedsimpulser:

\[
x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]
\]

Ved at anvende lineære systemers superpositionsegenskab kan output \( y[n] \) skrives som en linearkombination af systemets svar på forskudte enhedsimpulser. Hvis \( h_k \) er systemets svar på den forskudte enhedsimpuls \( \delta[n-k] \), kan systemets svar på en vilkårlig inputsekvens udtrykkes som

\[
y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]
\]

Hvis man således kender et lineært systems svar på en mængde af forskudte enhedsimpulser, kan man konstruere svaaret på et vilkårligt input. I almindelighed behøver sværene \( h_k[n] \) ikke at være indbyrdes relaterede for forskellige \( k \)-værdier. Hvis systemet imidlertid også er forsksydningsinvariant, så er

\[
h_k[n] = h_0[n-k]
\]

Da \( \delta[n-k] \) er en forskudt udgave af \( \delta[n] \), er svaret \( h_k[n] \) en forskudt udgave af \( h_0[n] \). Af bekvemmelighedsgrunde bortkastes index 0, og man definerer systemets \( enhedsimpulssvar \) \( h[n] \) som

\[
h[n] = h_0[n]
\]

(d.v.s. \( \delta[n] \mapsto h[n] \)). For et LSI system bliver 1.29 derfor

\[
y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]
\]

Dette resultat kaldes foldningssummen eller superpositionssummen, og operationen på højresiden benævnes foldningen af talfølgere \( x[n] \) og \( h[n] \), som symbolisk skrives \( x \ast h[n] \). Bemærk, at ligning 1.32 udtrykker et diskret LSI-systems svar på et vilkårligt inputsignal ved hjælp af dets impulssvar.
Regneregler for foldningsintegral og foldningssum. Der gælder følgende regneregler for foldningssummer:

1. Foldning er *kommutativ*:

\[ x * h[n] = h * x[n] \]  \hspace{1cm} (1.33)

2. Foldning er *associativ*:

\[ x * (h_1 * h_2[n]) = (x * h_1) * h_2[n] \]  \hspace{1cm} (1.34)

3. Foldning er *distributiv* over addition:

\[ x * (h_1 + h_2) = x * h_1[n] + x * h_2[n] \]  \hspace{1cm} (1.35)

og følgende regneregler for foldningsintegraler:

1. Foldning er *kommutativ*:

\[ x * h(t) = h * x(t) \]  \hspace{1cm} (1.36)

2. Foldning er *associativ*:

\[ x * (h_1 * h_2(t)) = (x * h_1) * h_2(t) \]  \hspace{1cm} (1.37)

3. Foldning er *distributiv* over addition:

\[ x * (h_1 + h_2) = x * h_1(t) + x * h_2(t) \]  \hspace{1cm} (1.38)

Disse regler vises let ved brug af definitionen for foldningssammen og foldningsintegral.

### 1.5 Opgaver

1. Find den lige og den ulige del af signalet \( x(t) = e^{-t}u(t) \). Vis, at den lige del er en lige funktion, og at den ulige del er en ulige funktion. Skitser den lige og den ulige del.

2. Et kontinueretids LFI-system har enhedsimpulssvaret \( h(t) = u(t) \). Hvad bliver outputsignalet svarende til inputsignalet \( x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \), hvor \( \alpha > 0 \)?

3. Betragt et diskretids LFI-system med enhedsimpulssvaret \( h[n] = u[n] \). Hvad er systemets svar på inputsignalet \( x[n] = \alpha^n u[n] \), hvor \( \alpha \) er reel og \( 0 < \alpha < 1 \)? Skitser outputsignalets udseende.

4. Betragt talfølgerne

\[ x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \]  \hspace{1cm} (1.39)

og

\[ h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \]  \hspace{1cm} (1.40)

Hvad bliver resultatet af foldningen \( x * h[n] \)?
Kapitel 2

Fourieranalyse og sampling

2.1 Indledning

I dette kapitel vises, hvorledes det er muligt at håndtere kontinuerligt varierende størrelser ved hjælp af processer på diskrete størrelser, således at man kan analysere og omformere kontinuerlige signaler ved hjælp af en datamaskine. Denne teori giver baggrunden for at forstå, hvorledes man kan behandle lyd- og billedsignaler på digital form, og er derfor af stor betydning ved moderne informationsbearbejdning. Den helt grundlæggende sætning er *samplingssætningen*, som løst sagt siger, at det er muligt at gendanne et båndbegrenset signal udfra informationstæt, hvis det samples med en frekvens, der er stærre end to gange den højeste frekvens, der oprører i signalet. Et båndbegrenset signal er et signal *med et begrenset frekvensbané*, d.v.s. det har en højeste og en laveste frekvens.

Vi begynder nu at tale om frekvenser, og derfor må vi have et redskab til analysere og karakterisering af frekvenser i signaler. Til dette formål bruges *Fourieranalyse*, og vi skal derfor først betragte Fourieranalyse, før vi ser på sampling. Først vil vi undersøge fremstilling af periodiske signaler ved hjælp af *Fourierækker*.

2.2 Fourierækker

Ved undersøgelse af lineære forskydningsinvariante systemer kan man med fordel benytte en opsplittning af signaler i basissignaler, der har følgende to egenskaber:

1. Mængden af basissignaler kan bruges til at konstruere en omfattende og brugbar klasse af signaler.

2. LFI systemets svar på de enkelte basissignaler er så simpel, at man får en bekvem fremstilling af systemets svar på ethvert signal, der kan konstrueres som linearkombination af basissignalerne.

For kontinuerlige LFI systemer opfylder mængden af komplekse eksponentialfunktioner $e^{st}$, hvor $s$ er et komplekst tal, disse betingelser. De komplekse eksponentialfunktioner har den egenskab, at et LFI systemets svar på et kompleks eksponential inputsignal er det samme
komplekse eksponentialsignal, blot med en ændring i amplituden, d.v.s.

\[ e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}, \]

(2.1)
hvor den komplekse amplitudefaktor \( H(s) \) i almindelighed er en funktion af den komplekse variable \( s \). Dette ses ved at betrægte et LFI-system med impulsvariet \( h(t) \). For et input \( x(t) \) kan vi bestemme output ved hjælp af føldningsintegralet (ligning (1.21)).

\[ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \]

(2.2)

Med input \( x(t) = e^{st} \) fås

\[ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-st}d\tau = H(s)e^{st}, \]

(2.3)
hvor \( H(s) \) er en kompleks konstant, hvis værdi afhænger af \( s \), og som kan bestemmes fra systemets impulsvar ved

\[ H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-st}d\tau \]

(2.4)

Værdien af at kunne dekomponere mere generelle signaler i komplekse eksponentiellfunktioner kan ses ved et eksempel. Lad \( x(t) \) være en linearkombination af tre komplekse eksponentiellfunktioner, d.v.s:

\[ x(t) = a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + a_3e^{s_3t} \]

(2.5)
og

\[ a_1e^{s_1t} \rightarrow a_1H(s_1)e^{s_1t} \]
\[ a_1e^{s_2t} \rightarrow a_2H(s_2)e^{s_2t} \]
\[ a_1e^{s_3t} \rightarrow a_3H(s_3)e^{s_3t} \]

Ved anvendelse af superpositionsprincippet fra afsnit (1.3) ses, at systemets svar på summen af inputsignalerne bliver summen af enkeltsvarerne, d.v.s.

\[ y(t) = a_1H(s_1)e^{s_1t} + a_2H(s_2)e^{s_2t} + a_3H(s_3)e^{s_3t} \]

(2.6)
I almindelighed haves

\[ \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow \sum_k a_k H(s_k)e^{s_k t} \]

(2.7)

Betragt nu to grundlæggende periodiske signaler, nemlig cosinusfunktionen \( \cos \omega_0 t \) og det periodiske komplekse eksponentialsignal \( x(t) = e^{j\omega t} \). Begge disse signaler er periodiske med grundfrekvensen (vinkelfrekvensen) \( \omega_0 = 2\pi f_0 \) og grundperioden \( T_0 = 2\pi/\omega_0 \). Sammen med signalet \( x(t) = e^{j\omega t} \) kan vi betragte dets harmoniske

\[ \phi_k(t) = e^{j\omega_0 t}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \]

(2.8)
Da hvert af de indgående signaler har en grundfrekvens, der er et multiplum af \( \omega_0 \) og derfor er periodisk med perioden \( T_0 \), så er en linearkombination af harmoniske komplekse eksponentialfunktioner af formen

\[
x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}
\]

(2.9)

også periodisk med perioden \( T_0 \). I denne ligning benævnes leddet, man får for \( k = 0 \), konstantledtet eller \( dc \)-leddet (dc= direct current = jævnstrøm). De to led, der fås for \( k = +1 \) og \( k = -1 \), har en grundperiode lig \( T_0 \) og benævnes grundkomponenterne eller den første harmoniske. Tilsvarende kaldes de to led for \( k = +2 \) og \( k = -2 \), som er periodiske med den dobbelte frekvens (eller den halve periode), den anden harmoniske komponent o.s.v.

Fremstillingen af et periodisk signal ved ligning (2.9) kaldes dets Fourierrækkefremstilling.

Hvis man ved, at et signal kan fremstilles ved en Fourierrækkefremstilling (2.9), er problemet, hvorledes man bestemmer koefficienterne \( a_k \). Ved at multiplicere begge sider af ligning (2.9) med \( e^{-im\omega_0 t} \) fås

\[
x(t)e^{-im\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t}
\]

og ved integration af begge sider fra 0 til \( T_0 = 2\pi/\omega_0 \) fås

\[
\int_0^{T_0} x(t)e^{-im\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t}dt.
\]

(2.11)

\( T_0 \) er grundperioden for \( x(t) \) og derfor integrerers over én periode. Hvis det vides, at rækken er konvergent (dette spørgsmål diskuteres senere), så kan man ombytte integration og summation, d.v.s.

\[
\int_0^{T_0} x(t)e^{-im\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[ \int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t}dt \right]
\]

(2.12)

Udregning af integralet i skarp parentes kan ske ved anvendelse af Euler’s formel:

\[
\int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} [\cos((k-n)\omega_0 t) + i \sin((k-n)\omega_0 t)]dt
\]

(2.13)

For \( k \neq n \) er \( \cos((k-n)\omega_0 t) \) og \( \sin((k-n)\omega_0 t) \) periodiske trigonometriske funktioner med grundperioden \( T_0/|k - n| \). I ligningen integrerers over et interval (af længden \( T_0 \)) som er et helt antal perioder for disse signaler. Da integralet svarer til at måle det samlede areal under disse funktioner i det givne interval, ses, at for \( k \neq n \) er begge integraler på højresiden 0. For \( k = n \) er integranden på venstresiden \( e^0 = 1 \) og derfor bliver integralet lig \( T_0 \). Derfor er

\[
\int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T_0, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases}
\]

(2.14)
og følgelig reduceres højresiden af ligning (2.12) til \( T_0 a_n \). Derfor er

\[
a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i\omega_0 t} dt,
\]

hvilket er den søgte ligning til bestemmelse af koefficienterne. Vi integrerede over intervallet \([0, T_0]\) men, på grund af signalernes periodicitet, er det ligegyldigt hvilket interval af længden \( T_0 \) vi integrerer over. Lader vi \( f_{T_0} \) betegne integration over et *vilkårligt* interval af længden \( T_0 \) haves

\[
\int_{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & \text{for } k = n \\ 0, & \text{for } k \neq n \end{cases}
\]

Vi har derfor resultatet: Hvis \( x(t) \) har en Fourierækkefremstilling, d.v.s. hvis \( x(t) \) kan udtrykkes som en linearkombination af harmoniske komplekse eksponentialfunktioner, så er signalets Fourierækkefremstilling

\[
x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\omega_0 t},
\]

hvor koefficienterne \( a_n \) er givet ved

\[
a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i\omega_0 t} dt
\]

Ligning (2.17) kaldes ofte *syntheseligningen* og ligning (2.18) for *analyseligningen*. Koefficienterne \( \{a_n\} \) kaldes for \( x(t) \)'s *Fourierækkekoefficienter* eller *spektralkoefficienter*. Disse komplekse koefficienter måler den del af signalet \( x(t) \), der er i hver harmoniske. Koefficienten \( a_0 \) er dc- eller konstantleddet af \( x(t) \) og er

\[
a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt
\]

**Eksempel.** Det periodiske firkantsignal vist på figur 2.1 og defineret over en periode som

\[
x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}
\]

er periodisk med grundperioden \( T_0 \) og grundfrekvensen \( \omega_0 = 2\pi/T_0 \). Fourierkoefficienterne for \( x(t) \) bestemmes ved hjælp af ligning (2.18). På grund af \( x(t) \)'s symmetri omkring \( t = 0 \) er det mest bekvemt at vælge at integrere over intervallet \(-T_0/2 \leq t \leq T_0/2\). Man finder

\[
a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0}
\]

For \( k \neq 0 \) findes

\[
a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega_0 t} dt = \left[ -\frac{1}{i k \omega_0 T_0} e^{-i\omega_0 t} \right]_{-T_1}^{T_1}
\]
Figur 2.1: Periodisk firkantsignal

Dette kan omskrives således

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T_0} \left[ e^{i k \omega_0 T_1} - e^{-i k \omega_0 T_1} \right]$$

(2.23)

Idet leddet indenfor den skarpe parantes er $\sin k\omega_0 T_1$ kan koefficienter $a_k$ udtrykkes som

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \ k \neq 0,$$

(2.24)

idet $\omega_0 T_0 = 2\pi$. Grafisk fremstilling af Fourierrækkekoefficienterne for dette eksempel for fast værdi af $T_1$ og forskellige værdier af $T_0$ er vist på figur 2.2. For $T_0 = 4T_1$ er $x(t)$ en symmetrisk firkantbølge (d.v.s. som er 1 for halvdelen af perioden og 0 for resten). Da er $\omega_0 T_1 = \pi/2$ og fra ligning (2.24)

$$a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \ k \neq 0$$

(2.25)

og fra ligning (2.21)

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

(2.26)

Fra ligning (2.25) ses at $a_k = 0$ for $k$ lige. Desuden svinger $\sin(\pi k/2)$ mellem $\pm 1$ for en følge af ulige værdier af $k$. Derfor er

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3\pi}$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

...
I dette eksempel er Fourierkoefficienterne reelle og derfor kan de afbildaes med en enkelt graf. I almindelighed er Fourierkoefficienterne dog komplekse og der er derfor nødvendigt med to grafer, svarende til real- og imaginærværdien eller magnituden og fasen for koefficienterne.

**Fourierækkens konvergens.** \(x(t)\) skal opfylde Dirichets betingelser, d.v.s. den periodiske funktion skal være af begrænset variation i omegn af et punkt. Dette er tilstrækkeligt til at sikre, at funktionens Fourierække konvergerer punktvis til middelværdien af funktionens grænser fra højre og fra venstre. Hvis funktionen er kontinuerligt i punktet, da til dens funktionsværdi i punktet. Begrænset variation er den egenskab ved en reel funktion \(x(t)\) at dens variation er begrænset. Den kan udtrykkes som differensen mellem to monotone, ikke afgørende funktioner.

**Den totale variation.** En funktions totale variation er et mål for, hvor meget den svinger:

\[
V_h(a, b) = \sup \{ \Sigma |h(t_{i+1}) - h(t_i)| \}
\]

(2.27)

over alle inddelinger af intervallet \([a, b]\). Den totale variation er er endelig hvis og kun hvis funktionen er af begrænset variation i intervallet. Hvis funktionen dekomponeres som \(f - g\), hvor \(f\) og \(g\) er monotone voksende, ved at sætte

\[
2f(t) = V_h(a, t) + h(t) - h(a)
\]
\[
2g(t) = V_h(a, t) - h(t) + h(a)
\]

for \(t\) mellem \(a\) og \(b\), så er den totale variation mellem \(a\) og \(b\) lig \(f(a) + g(b)\).
2.3 Fouriertransformationen

Fra matematik (og fysik) vides, at den Fouriertransformerede \( X(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) \) er defineret ved
\[
X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.28}
\]
hvor \( \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \) er vinkelfrekvensen, hvis \( f \) er frekvensen og \( T \) periodetiden og \( i \) er \( \sqrt{-1} \).

Ud fra et signal \( x(t) \)'s Fouriertransformerede \( X(\omega) \) kan vi gendanne det oprindelige signal ved den inverse Fouriertransformation:
\[
x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \tag{2.29}
\]

2.3.1 Forskydningsreglen

Hvis
\[
x(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} X(\omega)
\]
så er
\[
X(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} e^{-i\omega t_0} X(\omega) \tag{2.30}
\]
Dette kaldes forskydningsreglen. For at vise denne betragtes
\[
\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-i\omega t} dt \tag{2.31}
\]
Ved substitutionen \( \sigma = t - t_0 \) fås
\[
\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-i\omega(\sigma+t_0)} d\sigma = e^{-i\omega t_0} X(\omega) \tag{2.32}
\]

2.3.2 Foldningsreglen

En af Fouriertransformationens vigtigste egenskaber er dens sammenhæng med foldningsoperationen. For at udede denne sammenhæng betragtes et LFI system med impulsøvre \( h(t) \), output \( y(t) \) og input \( x(t) \), således at
\[
y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \tag{2.33}
\]
For den Fouriertransformerede \( Y(\omega) \) af \( y(t) \) findes
\[
Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) h(t-\tau) d\tau] e^{-i\omega t} dt \tag{2.34}
\]
Ved ombytning af integrationsrækkefølgen, og idet \( x(\tau) \) ikke afhænger af \( t \) fås
\[
Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau \tag{2.35}
\]

26
Ud fra forskydningsegenskaben er leddet i skarp parentes lig $e^{-i\omega \tau} H(\omega)$. Ved indssættelse af dette i ovenstående ligning findes

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega \tau} H(\omega) d\tau = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$  \hspace{1cm} (2.36)

Dette integral er $\mathcal{F}\{x(t)\}$, d.v.s.

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$  \hspace{1cm} (2.37)

Hermed har vi udledt *foldningsreglen*

$$y(t) = h \ast x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$  \hspace{1cm} (2.38)

### 2.3.3 Dualitetsreglen

Der er en vis symmetri mellem Fouriertransformationen (ligning 2.28) og den inverse Fouriertransformation (ligning 2.29). Denne symmetri er baggrunden for en egenskab ved Fouriertransformationen kendt som *dualitetsreglen*. Betragt to funktioner som er indbyrdes relaterede via integraludtrykket

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-iuv} dv$$  \hspace{1cm} (2.39)

Ved at sammenligne ligning 2.39 med Fourier analyse og synteseligningerne (ligning 2.28 og 2.29) ses, at med $u = \omega$ og $v = t$ er

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$  \hspace{1cm} (2.40)

medens med $u = t$ og $v = \omega$ er

$$g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(t)\}$$  \hspace{1cm} (2.41)

Derfor, hvis der er givet et Fourier transformationspar for tidsfunktionen $g(t)$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(\omega)$$  \hspace{1cm} (2.42)

going herefter betragter funktionen $f(t)$ som funktion af *tiden*, så er dens Fouriertransformationspar

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(-\omega)$$  \hspace{1cm} (2.43)

Dette resultat kan bruges til at ‘oversætte’ regler fra tidsdomænet til frekvensdomænet og omvendt. F.eks. som den efterfølgende regel.
2.3.4 Modulationsreglen

Modulationsreglen kan direkte afledes fra foldningsreglen ved brug af dualitetsreglen. Foldningsreglen lyder

\[ y(t) = h \ast x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \]  

(2.44)

Foldningsreglen fastslår, at foldning i tidsdomænet svarer til multiplikation i frekvensdomænet. På grund af dualiteten mellem tids- og frekvensdomænet må man forvente, at den duale egenskab også gælder, d.v.s. at multiplikation i tidsdomænet svarer til foldning i frekvensdomænet. Ved brug af dualitetsreglen fås

\[ t(t) = s(t)p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S \ast P(\omega)] \]  

(2.45)

Multiplikation af et signal med et andet benævnes *amplitudemodulation* og reglen kaldes derfor modulationsreglen.

2.3.5 Fouriertransformationen af periodiske signaler


For at antyde det generelle resultat betragtes et signal \( x(t) \) med den Fouriertransformerede \( X(\omega) \) i form af en enkelt impuls med arealet \( 2\pi \) ved frekvensen \( \omega = \omega_0 \), d.v.s.

\[ X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \]  

(2.46)

For at finde det signal \( x(t) \) for hvilket \( X(\omega) \) er den Fouriertransformerede anvendes den inverse Fouriertransformation (ligning (2.29)), hvorved fås

\[ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_0 t} \]  

(2.47)

Mere generelt, hvis \( X(\omega) \) er en linearkombination af impulser med ens afstand i frekvensdomænet (et liniespektrum), d.v.s.

\[ X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \]  

(2.48)

giver anvendelse af ligning (2.29)

\[ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} \]  

(2.49)

Det ses, at dette resultat svarer til Fourierrækkefremstillingen af et periodisk signal, som givet i ligning (2.17). Det vil sige at den Fouriertransformerede af et periodisk signal med
Figur 2.3: Tre forskellige kontinuerede signaler med samme sampleværdier

Fourierkoefficienterne \( \{a_k\} \) er et linespektrum svarende til harmoniske frekvenser, hvor arealet af impulsen for den \( k \)’te harmoniske frekvens \( k\omega_0 \) er \( 2\pi \) gange den \( k \)’te Fourierrækkekoefficient \( a_k \).

Et signal, som benyttes i analysen af samplingssætningen, er givet ved

\[
x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)
\]

Dette signal er periodisk med grundperioden \( T \). For at finde den Fouriertransformerede af dette signal beregnes dets Fourierrækkekoefficienter

\[
a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}
\]

Ved indsætning i ligning 2.48 fås

\[
X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left( \omega - \frac{2\pi k}{T} \right)
\]

d.v.s. den Fouriertransformerede af et impulstog i tidsområdet er en række impulser i frekvensområdet. Når afstanden mellem impulserne i tidsområdet (d.v.s. perioden) bliver længere, bliver afstanden mellem impulserne i frekvensområdet (d.v.s. grundfrekvensen) kortere.

### 2.4 Samplingssætningen

I almindelighed vil man ikke kunne forvente, at et signal på én tydig måde ville kunne rekonstrueres ud fra dets sampleværdier. For eksempel ses på figur 2.3 tre forskellige kontinuerede signaler, der alle har samme funktionsværdier for hele multipla af \( T \), d.v.s.

\[
x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)
\]

Der vil normalt vare en uendelighed af signaler, der kan passe til en forelagt mængde af sampleværdier. Men hvis et signal er båndbegrenset, og hvis sampleværdierne tages
tilstrækkelig tæt i forhold til den højeste frekvens, der findes i signalet, så vil sampleværdierne éttydigt definere signalet og det er muligt at rekonstruere det perfekt (d.v.s. uden informationstab). Lad os definere et impulstog \( p(t) \), som er vores samplingsfunktion. \( p(t) \) består af en række deltafunktioner, således defineret, at afstanden mellem de enkelte deltaimpulser er \( T \). Samplingsfrekvensen er da \( \omega_s = 2\pi/T \). I tidsdomænet haves

\[
x_p(t) = x(t)p(t)
\]

hvor

\[
p(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \delta(t - nT)
\]

\( x_p(t) \) er et impulstog, hvor impulsens værdi (areal under integration) er lig stikprøveværdierne af \( x(t) \) med afstanden \( T \), d.v.s.

\[
x_p(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)
\]

og fra modulationsreglen

\[
X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X * P(\omega)]
\]

og, idet den Fouriertransformerede \( P(\omega) \) af impulstoget \( p(t) \) er

\[
P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s),
\]

er

\[
X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)
\]

Det vil sige, at \( X_p(\omega) \), frekvensspektret for den samplede funktion, består af en række forskudte kopier af \( X(\omega) \) skaleret med \( 1/T \) som vist på figur 2.4. Lad nu \( \omega_M \) betegne den højeste frekvens, der forekommer i signalet. På figur 2.4 (c) er \( \omega_M < (\omega_s - \omega_M) \) d.v.s. \( \omega_s > 2\omega_M \) og følgelig er der ingen overlægning af de forskudte kopier af \( X(\omega) \). På figur 2.4(d), hvor \( \omega_s < 2\omega_M \) er der overlægning. For tilfældet vist på figur (c) bliver \( X(\omega) \) korrekt gengivet for hele multipla af \( \omega_s \). Derfor, hvis \( \omega_s > 2\omega_M \), kan \( x(t) \) ganske eksakt ud fra den samplede funktion \( x_p(t) \) ved at fjerne frekvenser over \( \omega_c \), hvor \( \omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M \), som vist på figur 2.5. Dette grundlæggende resultat, der betegnes samplingssætningen kan formuleres således:

*Hvis \( x(t) \) er et båndbegrænset signal med \( X(\omega) = 0 \) for \( |\omega| > \omega_M \), så er \( x(t) \) éttydigt bestemt ved dets sampleværdier \( x(nt) \), \( n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \) hvis samplingfrekvensen \( \omega_s > 2\omega_M \), hvor \( \omega_s = 2\pi/T \).*

Hvis altså samplepunkterne ligger tilstrækkelig tæt, så kan det samplede signal gendannes eksakt, d.v.s. der er muligt at interpolere mellem sampleværdierne, således at vi får det oprindelige signal igen. Interpolationen skal ske med \( \sin(\pi t)/\pi t \)-funktioner. For at indse det betragtes det impulssvar \( h(t) \), hvis Fouriertransformerede er
Figur 2.4: Frekvenspektret for den samplede funktion
Figur 2.5: Filteret signal
Figur 2.6: Fouriertransformationspar for båndbegrænset signal

\[ H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.59) \]

Ved brug af den inverse Fouriertransformation (ligning (2.29) findes \( x(t) \): \n
\[ h(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = T \sin \frac{\omega_c}{\pi t} = T \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \left( \frac{\omega_c t}{\pi} \right), \quad (2.60) \]

som er vist på figur 2.6. For funktionene \( \sin(\pi t)/\pi t \) bruges ofte betegnelsen sinc funktionen. Det rekonstruerede signal \( x_r(t) \) fås ved linearkombination af impulsvar på \( x_p \) (det samplede signal), d.v.s.

\[ x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) T \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \left( \frac{\omega_c (t - nT)}{\pi} \right). \quad (2.61) \]

Interpolationen er vist på figur 2.7.

2.4.1 Opgaver

1. Find Fourierrækkefremstillingen for \( x(t) = \sin \omega_0 t \).

2. Bestem og skitser den Fouriertransformerede \( X(\omega) \) af signalet \( x(t) = e^{-at} \), hvor \( a > 0 \).

3. Bestem den Fouriertransformerede af enhedsimpulsen \( x(t) = \delta(t) \).
Figur 2.7: Ideel båndbegrænset interpolation ved hjælp af sinc-funktionen.
4. Find og skitsér den Fouriertransformerede $X(\omega)$ af firkantsignalet

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$  \hspace{1cm} (2.62)

5. To tidsfunktioner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ multipliceres og deres produkt $w(t)$ samples med et periodisk impulsstog. $x_1(t)$ er båndbegrænset til $\omega_1$ og $x_2(t)$ er båndbegrænset til $\omega_2$. Find det største sampleinterval $T$, således at $w(t)$ kan gendannes ud fra det samplede signal $w_p(t)$ ved hjælp af et ideelt lavpasfilter.
Kapitel 3

Den diskrete Fouriertransformation

3.1 Diskrete komplekse eksponentialfunktioner

Ligesom for kontinuerte signalers vedkommende kan man definere et komplekst eksponentialsignal eller kompleks eksponentialfølge ved

\[ x[n] = C\alpha^n \]  

(3.1)

hvor \( C \) og \( \alpha \) i almindelighed er komplekse tal.

Hvis \( C \) og \( \alpha \) er reelle vil signalerne se ud som vist på figur 3.1. Hvis \( |\alpha| > 1 \), vil signalet vokse eksponentielt, og hvis \( |\alpha| < 1 \) vil signalet aftage eksponentielt. Hvis \( \alpha \) er positiv, vil alle værdier af \( C\alpha^n \) have samme fortegn, men hvis \( \alpha \) er negativ, vil \( x[n] \)'s fortegn skifte. Hvis \( \alpha = 1 \) er \( x[n] \) konstant, mens hvis \( \alpha = -1 \) vil \( x[n] \) skifte mellem +C og −C. Reelle diskrete talfølger bruges ofte til at beskrive befolkningsvækst eller kapitalvækst.

Hvis eksponenten er rent imaginær kan \( x[n] \) skrives

\[ x[n] = e^{i\Omega_0 n}, \]  

(3.2)

hvor \( i = \sqrt{-1} \) og \( \Omega_0 \) reel. Dette signal er nært beslægtet med signalet

\[ x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi) \]  

(3.3)

Dersom \( n \) er dimensionsløs, har både \( \Omega_0 \) og \( \phi \) enheden radianer. Eksempler på sådanne følger er vist på figur 3.2. Eulers lignon giver sammenhængen mellem komplekse eksponentialfunktioner og de trigonometriske funktioner:

\[ e^{i\Omega_0 n} = \cos\Omega_0 n + i\sin\Omega_0 n \]  

(3.4)

og

\[ A\cos(\Omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{i\phi}e^{i\Omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-i\phi}e^{-i\Omega_0 n} \]  

(3.5)

Et generelt diskret kompleks eksponentialsignal kan skrives som et produkt af reelle signaler og sinussignaler og nogle eksempler på sådanne er vist på figur 3.3

36
Figur 3.1: Diskrete eksponentialfunktioner $x[n] = \alpha^n$, hvor $C$ og $\alpha$ er reelle tal.

Figur 3.2: Diskret cosinussignal $x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$, ($A$ er reel).
3.1.1 Diskrete komplekse eksponentialsignalers periodicitet

Det kontinuerede signal $e^{j\omega_0t}$ har egenskaberne, at jo større værdien af $\omega_0$ er, des hurtigere svinger signalet. Desuden er $e^{j\omega_0t}$ periodisk for enhver værdi af $\omega_0$. Således forholder det sig ikke med diskrete signaler. Hvis frekvensen øges med $2\pi$ fra $\Omega_0$ til $\Omega_0 + 2\pi$ fås det samme signal, idet

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\Omega_0n} = e^{j\Omega_0n},$$

(3.6)

idet $e^{j2\pi n} = 1$. Det vil sige samtlige diskrete komplekse eksponentialsignals fås ved at lade $\Omega_0$ variere mellem 0 og $2\pi$ (eller et tilsvarende interval, f.eks. $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$). På grund af denne periodicitet vil det diskrete eksponentialsignals svingningshastighed ikke vokse, når $\Omega_0$ øges. Når $\Omega_0$ øges fra 0 til $\pi$ øges svingningshastigheden, men fra $\pi$ til $2\pi$ aftager den igen, indtil $\Omega_0 = 2\pi$, hvor værdien er den samme som for $\Omega_0 = 0$. Dette er illustreret på figur 3.4. D.v.s. de diskrete eksponentialsignaler, der svinger langsomt, har værdier af $\Omega_0$ nær 0,2$\pi$ eller ethvert andet multiplum af $2\pi$ og de, der svinger hurtigst, har $\Omega_0$ nær $\Omega_0 = \pm\pi$ eller ulige multipla af $\pi$.

For at signalet $x[n] = e^{j\Omega_0n}$ skal være periodisk med perioden $N$, kræves

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0n}$$

(3.7)

eller

$$e^{j\Omega_0N} = 1$$

(3.8)
Figur 3.4: Diskrete komplekse eksponentialekspansioner
For at denne ligning kan være opfyldt, skal \( \Omega_0 N \) være et helt multiplum af \( 2\pi \). D.v.s., der skal findes et heltal \( m \), således at

\[
\Omega_0 N = 2\pi m
\]

eller
\[
\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}
\]

(3.10)

Det betyder, at signalet \( e^{j\Omega_0 n} \) er ikke periodisk for vilkårlige værdier af \( \Omega_0 \). Kun hvis \( \Omega_0/2\pi \) er et rationelt tal, er signalet periodisk. Tilsvarende gælder diskrete sinus- og cosinus-signaler. Hvis \( x[n] \) er periodisk med grundperioden \( N \), så er dets grundfrekvens \( 2\pi/N \). Det er let at vise, at dersom \( \Omega_0 \neq 0 \) og hvis \( N \) og \( m \) ingen fælles faktorer har, så er signalets grundperiode \( N \). Derfor er grundfrekvensen for det periodiske signal \( e^{j\Omega_0 n} \)

\[
\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m}
\]

(3.11)

Grundperioden kan også skrives

\[
N = m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)
\]

(3.12)

Som ved kontinuerne signaler kan man betragte harmoniske periodiske eksponentialsignaler, d.v.s. periodiske eksponentialsignaler, der alle har perioden \( N \). Fra ligning (3.10) vides, at det netop er signaler ved frekvenser, der er multipla af \( 2\pi/N \), d.v.s.

\[
\phi_k[n] = e^{j(k2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots
\]

(3.13)

For kontinuerne signaler er alle harmoniske komplekse eksponentialsignaler (formel 2.8 side 24) \( e^{j(k2\pi/T)t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \) forskellige. Men det er ikke tilfældet for de diskrete eksponentialfunktioner, idet

\[
\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+2\pi)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n}e^{j(k2\pi/N)n} = \phi_k[n]
\]

(3.14)

Det betyder, at der kun er \( N \) forskellige periodiske eksponentialsignaler i mængden givet ved ligning (3.13) For eksempel er \( \phi_0[n], \phi_1[n], \ldots, \phi_{N-1}[n] \) alle forskellige og enhver anden \( \phi_N[n] \) er identisk med en af disse.

Til slut betragtes en diskret følge, som er fremkommet ved at sample en kontinuer eksponentialfunktion \( e^{j\omega_0 t} \) med ækvidistant beliggende samplingspunkter

\[
x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 T)n}
\]

(3.15)

Fra denne ligning ses, at \( x[n] \) selv er et diskret eksponentialsignal med \( \Omega_0 = \omega_0 T \). Derfor vil, i overensstemmelse med den tidligere analyse, \( x[n] \) kun være periodisk, hvis \( \omega_0 T/2\pi \) er et rationelt tal. Tilsvarende gælder diskrete følger opnået ved sampling af sinus- eller cosinus-signaler. F.eks. hvis

\[
x(t) = \cos(2\pi t)
\]

(3.16)

så kan de tre signaler på figur 3.4 opfattes som værende defineret ved

\[
x[n] = x(nT) = \cos(2\pi nT)
\]

(3.17)

for forskellige valg af \( T \). Specielt er \( T = \frac{1}{12} \) for figur (a), \( T = \frac{4}{12} \) for figur (b) og \( T = \frac{1}{12} \) for figur (c). Selv om \( x[n] \) ikke selv er periodisk, kan dets indhullingskurve godt være det. Det ses på figur (c).
3.1.2 LFI systemers svar på komplekse eksponentialsignaler

Ligesom for de kontinuerede signalers vedkommende vil vi se på LFI-systemers svar på diskrete eksponentialsignaler $x[n]$. Antag, at et LFI system med impulsivært $h[n]$ påtrykkes signalet

$$x[n] = z^n$$  \hspace{1cm} (3.18)

på indgangen, hvor $z$ er et komplekst tal. Systemets output kan findes ved hjælp af foldningssummen som

$$y[n] = x \ast h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$  \hspace{1cm} (3.19)

Herved ses, at hvis input $x[n]$ er et kompleks eksponentialsignal givet ved $x[n] = z^n$, så er output det samme komplekse eksponentialsignal multipliceret med en konstant, der afhænger af $z’s$ værdi, d.v.s.

$$y[n] = H(z)z^n,$$  \hspace{1cm} (3.20)

hvor

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$  \hspace{1cm} (3.21)

Denne ligning, sammen med superpositionsegenskaben, kan bruges til let at kunne bestemme et LFI systems output på en linearkombination af komplekse eksponentialsignaler. D.v.s., hvis

$$x[n] = \sum_{k} a_kz_k^n$$  \hspace{1cm} (3.22)

så bliver systemets output

$$y[n] = \sum_{k} a_kH(z_k)z_k^n$$  \hspace{1cm} (3.23)

Med andre ord: output kan også fremstilles som en linearkombination af de samme komplekse eksponentialsignaler, og hver koefficient i denne fremstilling af output fås som produktet af den tilsvarende koefficient $a_k$ i input og $H(z_k)$ svarende til $z_k^n$

3.2 Periodiske signalers Fourierrækkerefremstilling

Hvis et diskret signal er periodisk, f.eks. med perioden $N$, så er der kun $N$ forskellige signaler i mængden

$$\phi_k[n] = e^{j(2\pi/N)n}, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$  \hspace{1cm} (3.24)

Tilsvarende er en linearkombination af $\phi_k[n]$ af formen

$$x[n] = \sum_{k} a_k\phi_k[n] = \sum_{k} a_ke^{j(2\pi/N)n}$$  \hspace{1cm} (3.25)

periodisk med perioden $N$, og derfor er værdierne $\phi_k[n]$ kun forskellige i et interval af længden $N$ for $k$, og summationen behøver derfor kun at udstrækkes over dette interval.
D.v.s. at summationen i ligning (3.25) er over \( k \), hvor \( k \) gennemløber et interval bestående af \( N \) konsekutive heltal. Disse summationsgrænser skrives kort således: \( k = < N > \). D.v.s.

\[
x[n] = \sum_{k= < N >} a_k \phi_k[n] = \sum_{k= < N >} a_k e^{i k (2\pi/N)n}
\] (3.26)

\( k \) kan for eksempel antage værdierne \( k = 0, 1, \ldots, N - 1 \) eller \( k = 3, 4, \ldots, N + 2 \). På grund af periodiciteten vil nojagtig de samme led indgå i summationen på højresiden af ligning (3.26). Ligning (3.26) betegnes den diskrete Fourier-ække og koefficienterne \( a_k \) Fourierækkkekoefficienter.

Hvis der er givet en talsekvens \( x[n] \), der er periodisk med perioden \( N \), kan man undersøge, om der findes en fremstilling som ligning (3.26) og i givet fald hvad koefficienterne \( a_k \) er. Ved at evaluere (3.26) for værdier af \( n \) ses, at det svarer til at finde en løsning til det lineære ligningssystem

\[
x[0] = \sum_{k= < N >} a_k
\]

\[
x[1] = \sum_{k= < N >} a_k e^{i 2\pi k / N}
\]

\[\vdots\]

\[
x[N-1] = \sum_{k= < N >} a_k e^{i N (2\pi k / N)}
\]

Ligningen for \( x[N] \) er identisk med den for \( x[0] \) (fordi begi sider af (3.26) er periodiske med perioden \( N \)). D.v.s. vi har \( N \) lineære ligninger for \( N \) ukendte koefficienter \( a_k \), hvor \( k \) løber over \( N \) på hinanden følgende heltal. Det kan vises, at ligningerne er lineært uafhængige og derfor kan løses, hvorved koefficienterne \( a_k \) kan udtrykkes ved de givne værdier af \( x[n] \).

Det er muligt –ligesom for den kontinuerlige transformations vedkommende – at udlede et eksplicit udtryk for koefficienterne \( a_k \) bestemt ved talfølgen af værdier \( x[n] \). Først vises, at

\[
\sum_{n=0}^{N-1} e^{i k (2\pi / N)n} = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}
\] (3.27)

Hvad denne ligning udsiger, er, at summen over en periode af værdierne af en kompleks ekponentialfunktion er nul med mindre den kompleks ekponentialfunktion er en konstant, d.v.s. ligningen er den diskrete analogi til ligningen (jfr. ligning (2.14))

\[
\int_0^T e^{i k (2\pi / T)t} dt = \begin{cases} T, & k = 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}
\] (3.28)

For at udlede ligning (3.27) bemærkes først, at ligningens venstreside er en sum af et endeligt antal led i en kvotientække. Den har formen

\[
\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n
\]

hvor \( \alpha = e^{i k (2\pi / N)} \). Denne sum er

\[
\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}
\] (3.30)
Idet $e^{ik(2\pi/N)} = 1$ kun når $k$ er et multiplum af $N$ ($k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$) fås

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \frac{1 - e^{k(2\pi/N)}}{1 - e^{2\pi/N}}, & \text{ellers} \end{cases}$$

(3.31)

hvilket giver (3.30), idet $e^{ik(2\pi/N)}N = 1$. Idet hver af de komplekse eksponentialfunktioner i ligning (3.27) er periodiske med perioden $N$ gælder ligning (3.27), når summationen sker over et vilkårligt interval af længden $N$, d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{N} e^{ik(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

(3.32)

En grafisk fortolkning heraf er vist på figur 3.5 for $N = 6$. Her er tallene repræsenteret som vektorer i den komplekse plan, og hver enkelt vektor er en enhedsvektor (hver længden 1). Det ses, at summationen er nul, med mindre $k = 0, 6, 12, \ldots$ o.s.v. Ved at multiplicere Fourierrækkefremstillingen (3.26) på begge sider med $e^{-ir(2\pi/N)n}$ og summere over $N$ led følger

$$\sum_{n=0}^{N} x[n]e^{-ir(2\pi/N)n} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i(k-r)(2\pi/N)n} - N \delta[r]$$

(3.33)

Ved at ombytte summationsrækkefølgen på højresiden fås

$$\sum_{n=0}^{N} x[n]e^{-ir(2\pi/N)n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N} e^{i(k-r)(2\pi/N)n}$$

(3.34)
Den inderste sum (med indeks $n$) er ifølge lign. (3.27) nul med mindre $k - r$ er nul eller et helt multiplum af $N$. Hvis man derfor bruger det samme summationsinterval for $r$ og $k$, så er denne sum lig $N$, hvis $k = r$ og 0, hvis $k \neq r$. Højresiden af ligningen reduceres derfor til $N_{a}$, og man har

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi / N) n}$$  \hspace{1cm} (3.35)$$

Ved hjælp af denne formel kan Forierrækvens koefficienter udregnes. Fourierrækkeformlen for diskrete signaler ser derfor således ud:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi / N) n}$$ \hspace{1cm} (3.36)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi / N) n}$$ \hspace{1cm} (3.37)$$

### 3.3 Den diskrete Fouriertransformation

Den diskrete Fouriertransformation (DFT) for signaler af endelig længde er en vigtig metode til Fourieranalyse af diskrete sekvenser og desuden er den velegnet til implementation på en datamaskine, i form af Fast Fourier Transform (se næste kapitel). Hvis $x[n]$ er et signal af endelig længde, d.v.s. der findes et heltal $N_1$, således at $x[n] = 0$ udenfor intervallet $0 \leq n \leq N_1$ - 1, så kan man konstruere et periodisk signal $\tilde{x}[n]$, som er lig med $x[n]$ over en periode. Mere præcist, lad $N \geq N_1$ være et givet heltal og $\tilde{x}[n]$ være periodisk med perioden $N$ således at

$$\tilde{x}[n] = x[n], \hspace{0.5cm} 0 \leq n \leq N - 1$$  \hspace{1cm} (3.38)$$

$\tilde{x}[n]$’s Fourierrækkekoefficienter er givet ved

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi / N) n}$$ \hspace{1cm} (3.39)$$

Ved at vælge summationsintervallet til at være det, hvor $\tilde{x}[n] = x[n]$ fæs

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi / N) n}$$ \hspace{1cm} (3.40)$$

Hvis DFT af $x[n]$ betegnes $\tilde{X}(k)$, kan analyseligningen skrives

$$\tilde{X}(k) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi / N) n}, \hspace{0.5cm} k = 0, 1, \ldots, N - 1$$ \hspace{1cm} (3.41)$$

og synteseligningen

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi / N) n}, \hspace{0.5cm} k = 0, 1, \ldots, N - 1$$ \hspace{1cm} (3.42)$$

Dette er udtrykket for den diskrete Fouriertransformation. I det næste kapitel skal vi se på beregningsalgoritmen (Fast Fourier Transform – FFT) ved hjælp af hvilken beregningskompleksiteten af DFT-udregningen kan reduceres væsentligt.
Figur 3.6: (a) Diskret signal til eksempel 1 og (b) enhedsrødderne

**Eksempel 1** Vi vil beregne den diskrete Fouriertransformation af signalet

\[
x[n] = \begin{cases} 
  x[0] &= \frac{3}{4} \\
  x[1] &= 0 \\
  x[2] &= \frac{1}{4} \\
  x[3] &= 0
\end{cases} \quad (3.43)
\]

tvært på figur 3.6(a) Vi kan opskrive \( x[n] \) kort på vektorform således: \( [3/4 \ 0 \ 1/4 \ 0] \). \( N \) er lig med 4 i dette eksempel. DFT beregies ved hjælp af ligning (3.41). Faktoren \( e^{-2\pi i/N} \), der indgår i udtrykket på ligningen højreside, kaldes den komplekse (primitive) enhedsrød svarende til \( N = 4 \). Det er anskueligt at afbilde den og dens potenser, svarende til værdierne af \( n = 0, 1, 2, 3 \) i et Arganddiagram (tegning af den komplekse plan), hvilket ses på figur 3.6(b). Svarende til værdierne af \( k \) kan man opstille følgende tabel for \( e^{-2\pi i/N} \): 

<table>
<thead>
<tr>
<th>( k )</th>
<th>0</th>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>-i</td>
<td>-1</td>
<td>i</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>1</td>
<td>-1</td>
<td>1</td>
<td>-1</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>1</td>
<td>i</td>
<td>-1</td>
<td>-i</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Det er nu forholdvis let at udregne \( \tilde{X}(k), k = 0, 1, 2, 3 \) ved produktet af vektoren \( [3/4 \ 0 \ 1/4 \ 0] \) og tabellens rækker. Man finder f.eks.

\[
\tilde{X}(2) = \frac{1}{4} \{1 \cdot (3/4) - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (1/4) - 1 \cdot 0\} = \frac{1}{4} \quad (3.44)
\]

Ved udregning af alle værdier findes den diskrete Fouriertransformation af \([3/4 \ 0 \ 1/4 \ 0]\) til \((1/4)[1 \ 1/2 \ 1 \ 1/2]\).
3.4 Opgaver

1. Der er givet et LFI-system med impulssvaret \( h[n] = \alpha^n u[n] \), hvor \(-1 < \alpha < 1\). Systemet påtrykkes signalet
   \[ x[n] = \cos \left( \frac{2\pi n}{N} \right) \]  
   (3.45)
   Find Fourierrekkekoefficienterne for output og bestem \( y[n] \) for \( N = 4 \).

2. Beregn den diskrete Fouriertransformerede af \( [3/4 \ 0 \ 1/4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \).

3. Beregn den inverse diskrete Fouriertransformerede af \( [4 \ 12 \ 12 \ 12] \).
Kapitel 4

FFT: Den hurtige Fouriertransformation


I dette kapitel skal vi se på metoder til beregning af DFT. Vi vil betragte den effektive algoritme til beregning af DFT. Der er mange måder at måle algoritmisk kompleksitet og effektivitet på, og den endelige vurdering afhænger af den teknologi, der står til rådighed og den planlagte anvendelse. Her vil vi anvende antallet af multiplikationer og additioner som et mål for algoritmisk kompleksitet. Dette mål er simpelt at anvende, og antallet af multiplikationer og additioner står i direkte forhold til beregningshastigheden, når algoritmerne implementeres på almindelige datamaskiner eller mikroprocessorer. Undertiden er andre mål mere relevant; f.eks. ved visse VLSI-implementationer er chip-arealet ofte den mest vigtige faktor, og chiparealet er ikke nødvendigvis direkte relateret til antallet af aritmetiske operationer.

Med hensyn til multiplikationer og additioner er klassen af FFT-algoritmer størrelsesordener bedre end konkurrerende algoritmer. FFT-algoritmens effektivitet er faktisk så høj, at i mange tilfælde er den mest effektive måde at beregne foldning på, at transformere de talfølger, der skal foldes, multiplicere deres transformerede og så beregne den inverse transformation af produktet af transformationerne.

4.1 Effektiv beregning af den diskrete Fouriertransformation

Som defineret i formel (3.41) er den diskrete Fouriertransformation (DFT) af en talfølge af endelig længde $N$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$ (4.1)
Idet man sætter $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ kan formlen skrives

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{-kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1 \quad (4.2)$$

Den inverse Fouriertransformation er givet ved

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1 \quad (4.3)$$

I ligning (4.2) og (4.3) kan både $x[n]$ og $X[k]$ være komplekse tal. Da de to ligninger kun adskiller sig med hensyn til fortegnet for eksponenten for $W_N$ og skalafaktoren $\frac{1}{N}$, er de beregningsmæssige overvejelser ens for de to ligninger.

Først betragtes beregningskompleksiteten ved direkte udregning af DFT-ligningen (4.2). Da $x[n]$ kan være kompleks, kræves $N$ komplekse multiplikationer og $(N - 1)$ komplekse additioner til beregning af hver værdi af DFT, hvis ligning (4.2) anvendes direkte som beregningsformel. Til udregning af $N$ værdier kræves derfor i alt $N^2$ komplekse multiplikationer og $N(N - 1)$ komplekse additioner. Hver kompleks multiplikation kræver fire reelle multiplikationer og to reelle additioner, og hver kompleks addition kræver to reelle additioner. Derfor kræver den direkte udregning af $X[k]$ for hver værdi af $k$ $4N^2$ reelle multiplikationer og $(4N - 2)$ reelle additioner $^1$. Da $X[k]$ skal beregnes for $N$ forskellige værdier af $k$, kræver den direkte udregning af den diskrete Fouriertransformation af en talfølge $x[n]$ $4N^2$ reelle multiplikationer og $N(4N - 2)$ reelle additioner. Foruden de multiplikationer og additioner, der er nødvendige, kræves lagerplads til lagring af de $N$ komplekse inputværdier samt de $N$ komplekse koeficienter $W_N^{kn}$. Da antallet af beregninger og dermed beregningsstiden ca. er proportional med $N^2$, er det klart, at antallet af aritmetiske operationer for beregning af DFT ved den direkte metode bliver meget stort for store værdier af $N$. Derfor er man interessert i beregningsprocedurer, der formindsker antallet af multiplikationer og additioner.

De fleste metoder til effektivitetsforbedring ved udregning af DFT er baseret på udnymtelse af $W_N^{kn}$’s symmetrielagskaber, specielt

1. $W_N^{KN(n-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$ (kompleks konjugeret symmetri)
2. $W_N^{kn} = W_N^{(k+n+N)} = W_N^{(k+N)n}$ (periodicitet i $n$ og $k$).

Den første egenskab kan benyttes til at reducere antallet af multiplikationer ca. med en faktor 2. Desuden vil, for visse værdier af produktet $kn$, de sinus- og cosinusfunktioner, der defineres ved den komplekse eksponentialfunktion, antage værdien 0 eller 1, hvorved multiplikation kan undgås. Den største beregningsbesparelse ligger dog i periodiciteten af følgen $W_N^{kn}$, som kan benyttes til den store beregningsreduktion fra $O(N^2)$ til $O(N \log_2 N)$.

FFT algoritmerne bygger på den grundlæggende egenskab at opdele beregningen af den diskrete Fouriertransformation af en talfølge af længden $N$ i stedse mindre diskrete

$^1$I denne diskussion er tallene for antallet af beregninger cirka-tal. F.eks. kræver multiplikation med $W_N^{kn}$ faktisk ikke en multiplikation. Men vurderingen af de beregningsmæssige kompleksiteten ved disse approksimative metoder er alligevel tilstrækkelig god til at tillade sammenligning mellem de forskellige klasser af algoritmer.

4.2 FFT algoritme

Del-og-hersk principippet går ud på at dekomponere beregningen i stadig mindre DFT-beregninger. I denne proces vil vi udnytte både symmetri-egenskaberne og periodiciteten af den kompleks eukspontalfunktion $e^{-j(2\pi/N)kn}$. Algoritmer, i hvilke dekompositioner er baseret på opdelingen af talfølgen $x[n]$ i stadig mindre delfølger, kaldes opdeling i tid (engelsk: decimation-in-time).

Principippet ved denne opdeling demonstres mest bekvent ved at betrægge specialtilfældet, hvor $N$ er en heltalling 2-er potens, d.v.s $N = 2^t$. Da $N$ er et lige tal kan beregningen af $X[k]$ ske ved at opdele $x[n]$ i to ($\frac{N}{2}$)-punks 2 talfølger bestående af punkterne med lige indeks i $x[n]$ og punkterne med ulige indeks i $x[n]$. Idet $X[k]$ er givet ved

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$  \hspace{1cm} (4.4)

og ved at opdele $x[n]$ i dens lige- og ulige-indeksederede punkter fås

$$X[k] = \sum_{n \text{ lige}} x[n]W_N^{nk} + \sum_{n \text{ ulige}} x[n]W_N^{nk}.$$  \hspace{1cm} (4.5)

Når $n$ er lige, kan $n$ skrives $n = 2r$ og når $n$ er ulige kan $n$ skrives $n = 2r + 1$. Hvis dette indføres i den ovennævnte formel, fås

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{2r+1k}$$  \hspace{1cm} (4.6)

$$= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r](W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1](W_N^2)^{rk}.$$  \hspace{1cm} (4.7)

Men man kan benytte, at

$$W_N^2 = \left(e^{j2\pi/N}\right)^2 = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi} = W_N^N.$$  \hspace{1cm} (4.8)

Med brug heraf kan ligning (4.7) omskrives til

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[2r]W_N^{\frac{rk}{2}} + W_N^k \sum_{r=0}^{N-1} x[2r+1]W_N^{\frac{rk}{2}}$$  \hspace{1cm} (4.9)

$$= \quad G[k] + W_N^k H[k]$$  \hspace{1cm} (4.10)

\footnote{Ved gennemgang af teorien for FFT-algoritmer bruges både ordet sample og punkt om værdierne i talfølgen. Desuden kaldes en talfølge af længden $N$ en $N$-punkts følge, og en DFT af længden $N$ kaldes en $N$-punkts DFT.}
Figur 4.1: Signalgraf af dekompositionen af en $N$-punkts DFT i to $\frac{N}{2}$-punkts DFT beregninger ($N = 8$)

Hver af summerne i ligning (4.9) er en $\frac{N}{2}$-punkts DFT. Den første sum er en $\frac{N}{2}$-punkts DFT af punkterne med lige indeks i den oprindelige talfølge, mens den anden er en en $\frac{N}{2}$-punkts DFT af de ulige indeksærede punkter i den oprindelige følge. Skønt indeks $k$ løber over $N$ værdier $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, skal hver af de to summer kun beregnes for $k$ løbende mellem 0 og $\frac{N}{2} - 1$, idet $G[k]$ og $H[k]$ hver især er periodiske med perioden $\frac{N}{2}$. Når de to DFT’er er beregnet, skal de kombineres svarende til ligning (4.9) for at kunne give $N$-punkts DFT’en $X[k]$. Figur 4.1 viser denne beregning for $N = 8$. På denne figur bruges signalgraf vedtægterne, der tidligere er blevet indført. Kanter, der leder ind til knuder, summeres for at give knudevariablen. Når ingen koefficienter er angivet, antages kantforstærkningen at være 1. For de øvrige kanter er kantforstærkningen en heltalspotens af $W_N$.


Når beregningerne omordnes som vist i ligning (4.9) kan man sammenligne det nødvendige antal multiplicationer og additioner med det antal, der er nødvendigt ved en direkte udregning af DFT’en. Tidligere så jeg, at til direkte udregning uden udnyttelse af symmetrien krævedes $N^2$ komplekse multiplicationer og additioner. Til sammenligning kræver ligning (4.9) beregning af to $\frac{N}{2}$-punkts DFT’er, hvilket kræver $2(\frac{N}{2})^2$ komplekse multiplicationer og ca. $2(\frac{N}{2})^2$ komplekse additioner, hvis de to $\frac{N}{2}$ DFT’er udregnes ved den direkte metode. Herefter skal de to $\frac{N}{2}$ punkts DFT’er kombineres, hvilket kræver $N$ komplekse multiplicationer, svarende til at multiplicere den sidste sum med $W_N^k$, og $N$ komplekse additioner, svarende til at addere produktet til den første sum. Følgelig kræver beregningen af ligning (4.9) for alle værdier af $k$ højest $N + 2(\frac{N}{2})^2$ $N + \frac{N^2}{4}$ komplekse multiplicationer og komplekse additioner. Det er let at efterfølge, at for $N > 2$ er totalen $N + \frac{N^2}{4}$ mindre end $N^2$.

Ligning (4.10) svarer til at opdele den originale $N$-punkts beregning i to $\left(\frac{N}{2}\right)$-punkts DFT-beregninger. Hvis $\frac{N}{2}$ er etle, hvilket den er når $N$ er et potens af 2, så kan hver af de $\left(\frac{N}{2}\right)$-punkts DFT-i ligning (4.9) beregnes ved at opsplite hver af summerne i ligning (4.10) i to $\left(\frac{N}{2}\right)$-punkts DFT-er, som herefter kan kombineres til at give $\left(\frac{N}{2}\right)$-punkts DFT-erne. Derfor kan $G[k]$ i ligning (4.10) skrives som

$$G[k] = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g[2l]W_{\frac{N}{2}}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g[2l + 1]W_{\frac{N}{4}}^{(2l+1)k}$$

eller

$$G[k] = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g[2l]W_{\frac{N}{2}}^{lk} + W_{\frac{N}{4}}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g[2l + 1]W_{\frac{N}{4}}^{lk}$$

På samme måde kan $H[k]$ skrives

$$H[k] = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} h[2l]W_{\frac{N}{2}}^{lk} + W_{\frac{N}{4}}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} h[2l + 1]W_{\frac{N}{4}}^{lk}$$

Det vil sige, at $\frac{N}{2}$-punkts DFT’en $G[k]$ kan føltes ved at kombinere $\frac{N}{2}$-punkts DFT-erne fra følgerne $g[2l]$ og $g[2l + 1]$. På samme måde kan $\frac{N}{2}$-punkts DFT’en $H[k]$ føltes ved at kombinere $\frac{N}{2}$-punkts DFT-erne fra følgerne $h[2l]$ og $h[2l + 1]$. Det betyder, at beregningen kan udføres som vis på figur 4.2. Hvis den beregning, der er vist på figur 4.2 indsatset i signalgrafen fra figur 4.1 føltes den komplett signalgraf vist på figur 4.3, hvor koeficienterne er udtrykt i potenser af $W_N$ i stedet for $W_{\frac{N}{2}}$, idet $W_{\frac{N}{2}}^2 = W_N^2$. For den 8-punkts DFT, der er anvendt som illustreret i beregningen reduceret til en beregning af en 2-punkts DFT, som let udregnes som vist på figur 4.4. Hvis beregningen svarende til figur 4.4 indsatset i signalgrafen figur 4.3 føltes den komplett signalgraf vist beregningen af 8-punkts DFT’en, som vist på figur 4.5.  

\[3\] For enhedens skyld antages at $N$ er så stor, at $(N - 1)$ kan tilsættes med $N$.
Figur 4.2: Signalgraf, der viser dekompositionene af en $\frac{N}{2}$-punkts DFT-beregning i to $\frac{N}{4}$-punkts beregninger ($N=8$).

Figur 4.3: Resultatet af at indsætte figur 4.2 i figur 4.1 ($N=8$).
Figur 4.4: Signalgraf for en 2-punkts DFT
Figur 4.5: Signalgraf for den komplette beregning af en 8-punkts DFT
For det almindelige tilfælde, men hvor \( N \) stadig er en 2-er potens, går man frem ved bestandigt at underinddele med en faktor 2 indtil der kun er en 2-punkts transformation tilbage. Signalgrafen på figur 4.5 viser eksplicit beregningsoperationerne. Ved optælling af grene med faktorer af formen \( W_N^k \) benævnes, at der i hvert trin er \( N \) komplekse multiplikationer og \( N \) komplekse additioner. Da der er \( \log_2 N \) trin, er der i alt \( n \log_2 N \) komplekse multiplikationer og additioner. Dette er en betragtelig besparelse. F.eks. hvis \( N = 2^{10} = 1024 \) så er \( N^2 = 2^{20} = 1.048.576 \), hvorimod \( N \log_2 N = 10.240 \).

### 4.3 Opgaver

1. Antag, at vi skal beregne en FFT på 16 punkter, men kun \( x[0] \) og \( x[1] \) er forskellige fra nul. Alle øvrige \( x[n] = 0 \). Optegn signalgrafen og bestem antallet af operationer.


3. At beregne en DFT kræver sædvanligvis komplekse multiplikationer. Betragt produktet \( x + iy = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \). På denne form kræver en kompleks multiplikation 4 reelle multiplikationer og 2 reelle additioner. Vis, at en kompleks multiplikation kan udføres ved 3 reelle multiplikationer og 5 additioner ved hjælp af algoritmen

\[
\begin{align*}
x &= (a - b)d + (c - d)a \\
y &= (a - b)d + (c + d)b
\end{align*}
\]
Kapitel 5

Z-transformationen

Som tidligere vist er systemsvaret \( y[n] \) for et diskret forskydningsinvariant system med impulssvaret \( h[n] \) på et komplekst eksponentialinput af formen \( z^n \)

\[
y[n] = H(z)z^n,
\]

hvor

\[
H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}
\]

Hvis \( z = e^{j\Omega} \), hvor \( \Omega \) er reel (d.v.s. \( |z| = 1 \)), svarer summationen i ligning (5.2) til \( h[n] \)'s diskrete Fouriertransformation. I almindelighed, når \( |z| \) ikke er begrænset til at være 1, kaldes summationen i ligning (5.2) for \( h[n] \)'s \( z \)-transformation.

\( z \)-transformationen af en talfølge \( x[n] \) defineres således

\[
X(z) \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}
\]

hvor \( z \) er en kompleks variabel. \( z \)-transformationen på denne form betegnes ofte den \( \textit{bilateral} \) \( z \)-transformation for at skelne den fra den unilaterale \( z \)-transformation, som diskuterer senere. Vi vil henvise til \( X(z) \), som defineret i ligning (5.3) som \( z \)-transformationen og kun bruge betegnelsen “bilateral” når det er nødvendig for at undgå flertydighed.

\( z \)-transformationen af \( x[n] \) betegnes undertiden \( \mathcal{Z}\{x[n]\} \) og forbindelsen mellem \( x[n] \) og dens \( z \)-transformerede angives som

\[
x[n] \leftrightarrow X(z)
\]

Der er vigtige forbindelser mellem \( z \)-transformationen og Fouriertransformationen. Idet den komplekse variable \( z \) kan udtrykkes på polær form som

\[
z = re^{j\Omega}
\]

hvor \( r \) er modulus (magnitude) af \( z \) og \( \Omega \) \( z \)'s vinkel. Udtrykt ved \( r \) og \( \Omega \) bliver ligning (5.3)

\[
X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}
\]
Figur 5.1: Den komplekse $z$-plan. $z$-transformationen reduceres til Fouriertransformationen for værdier af $z$ på enhedscirklen.

eller

$$X(\rho e^{i\phi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-i\phi n}$$

(5.7)

Ud fra denne ligning ses, at $X(\rho e^{i\phi})$ er den Fouriertransformerede af sekvensen $x[n]$ multipliceret med en reel eksponent $r^{-n}$, d.v.s.

$$X(\rho e^{i\phi}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

(5.8)

Den eksponentiale vægtning $r^{-n}$ kan være aftagende eller voksende med voksende $n$, afhængig af, om $r$ er større eller mindre end 1. Man bemærker, at for $r = 1$, d.v.s. $|z| = 1$, reduceres $z$-transformationen til Fouriertransformationen, d.v.s.

$$X(z)|_{z=\rho} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

(5.9)

Derfor reduceres $z$-transformationen til Fouriertransformationen, når modulus (magnitude) af transformationsvariablen $z$ er lig med 1, d.v.s. $r = 1$, eller ækvivalent, $|z| = 1$. Fra ligning (5.8) ses, at betingelsen for, at $z$-transformationen konvergerer er, at Fouriertransformationen af $x[n]r^{-n}$ konvergerer. For en given følge $x[n]$ må det forventes, at den konvergerer for nogle værdier af $r$ og ikke for andre. Generelt er der i forbindelse med $z$-transformationen af en sekvens knyttet en mængde af værdier af $z$, for hvilke $X(z)$ konvergerer. Denne mængde kaldes konvergensområdet (region of convergence; ROC). Hvis konvergensområdet omfatter enhedscirklen, vil Fouriertransformationen også konvergere. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 5.1 Signalet $x[n] = a^nu[n]$ har ifølge ligning (5.3)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^nu[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

(5.10)

Konvergens af $X(z)$ kræver $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$. Derfor er konvergensområdet de værdier af $z$, for hvilke $|az^{-1}| < 1$ eller $|z| > |a|$. Her findes

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

(5.11)
Derfor konvergerer \( z \)-transformationen for enhver endelig værdi af \( a \). Fouriertransformationen af \( x[n] \) konvergerer derimod kun hvis \( |a| < 1 \). For \( a = 1 \) er \( x[n] \) enhedstrinfolgen med \( z \)-transformationen

\[
X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1
\]  

(5.12)

På figur 5.2 er vist et pol-nulpunktsplot svarende til eksempel. Konvergensområdet er vist skravert.

## 5.1 Den unilaterale \( z \)-transformation

Den \( z \)-transformation, vi har set på indtil nu, er på den form, der kaldes den bilaterale \( z \)-transformation. Der findes en anden udgave, der betegnes den \textit{unilaterale} \( z \)-transformation. Den unilaterale \( z \)-transformation er specielt velegnet til at analysere kausale systemer, der er givet ved lineære differensligninger med konstante koefficienter og med begyndelsesbetingelser (d.v.s. ikke i hvile initialt).

Den unilaterale \( z \)-transformation \( X(z) \) af en talfolge \( x[n] \) er givet ved

\[
X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}
\]  

(5.13)

og er forskellig fra den bilaterale \( z \)-transformation derved, at summationen kun udføres over ikke-negative værdier af \( n \), uanset om \( x[n] \) er nul for \( x < 0 \). Derfor kan den unilaterale \( z \)-transformation opfattes som den bilaterale transformation af \( x[n]u[n] \) (d.v.s. \( x[n] \) multipliceret med enhedstrinfunktionen). Specielt vil for enhver følge, der er nul for \( n < 0 \), den unilaterale og den bilaterale \( z \)-transformation være ens. Konvergensområdet for \( X(z) \) vil altid være området udenfor en cirkel om origo i den kompleks plan.

**Eksempel 5.2** Betragt signalet

\[
x[n] = a^nu[n]
\]  

(5.14)

Da \( x[n] = 0 \) for \( n < 0 \) er den unilaterale og den bilaterale transformation ens og lig

\[
X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|
\]  

(5.15)
Eksempel 5.3  Givet
\[ x[n] = a^{n+1}u[n + 1] \quad (5.16) \]
I dette tilfælde er den unilaterale og den bilaterale transformation ikke ens. Den unilaterale transformation er
\[ X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (5.17) \]
Ligesom for Fouriertransformationens vedkommende kan man finde forskydningsegenskaben for den unilaterale \( z \)-transformation. For at udlede den, betragtes signalet
\[ y[n] = x[n - 1] \quad (5.18) \]
Heraf findes
\[ Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - 1] z^{-n} \quad (5.19) \]
\[ = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n - 1] z^{-n} \quad (5.20) \]
\[ = x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-(n+1)} \quad (5.21) \]
\[ = x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (5.22) \]
således at
\[ Y = x[-1] + z^{-1} X(z) \quad (5.23) \]
Tilsvarende har signalet
\[ w[n] = x[n - 2] \quad (5.24) \]
den unilaterale \( z \)-transformerede
\[ \mathcal{W}(z) = x[-2] + x[-1] z^{-1} + z^{-2} X(z), \quad (5.25) \]
og tilsvarende udtryk kan findes for den unilaterale transformation af \( x[n-m] \). Denne egenskab kan bruges til at løse differensligninger med begyndelsesbetingelser. For at illustrere dette, betragtes et eksempel:

Eksempel 5.4  Betragt differensligningen
\[ y[n] + 3y[n - 1] = x[n] \quad (5.26) \]
med \( x[n] = u[n] \) og begyndelsesbetingelsen
\[ y[-1] = 1 \quad (5.27) \]
Ved at tage den unilaterale \( z \)-transformation på begge sider af ligning (5.26) fås
\[ Y(z) + 3z^{-1} Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (5.28) \]
Ved at løse ligningen m.h.t. $\mathcal{Y}(z)$ findes

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{3}{1+3z^{-1}} + \frac{1}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$  (5.29)

Ved at udvikle i partialbrøker findes

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{9/4}{1+3z^{-1}} + \frac{1/4}{1-z^{-1}}$$  (5.30)

og ved anvendelse af eksempel 5.2 på hvert led fås

$$y[n] = \left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}(-3)^n\right]u[n]$$  (5.31)

### 5.2 Opgaver

1. Givet differensligningen

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$  (5.32)


2. Givet differensligningen

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$  (5.33)


3. Givet differensligningen

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$  (5.34)

Kapitel 6

Billedkodning: JPEG

6.1 Oversigt


Den tabsgivende JPEG-kodning er optimeret med hensyn til fotografiske optagelser med kontinuerne farveovergange. For andre typer billeder, f.eks. billeddata der repræsenterer skarpe kontrastovergange som tegneserier, streggrafik og tekster, der indeholder store farveflader og abrupte farveskift, er den mindre egnet. For levende billede findes en tilsvarende MPEG-standard.

6.2 Indledning

Fotokvalitet ved computerbilleder betyder mindst en opløsning på 640 x 480 billedpunkter med en farvedybde på 16 til 24 bit, hvorved der ved fotokvalitet her menes den skarphed og farvekvalitet, der kan opnås ved et fjernsynsbillede ved optimale betingelser. Et sådant billede varer til en datamængde på ca. 1 Mbyte. Billeddata er således ret uhåndterlige, f.eks. når man skal oprette et større billedarkiv eller sende et farvebillede via modem og telefoni/ledning eller via ISDN.


Man indå dog snart, at det ikke er nødvendigt at kunne genskabe billedinformationen
100 % for at det rekonstruerede billede ikke skal kunne skelnes fra originalen, for allerede ved indscanning af billedet sker en sammenpåning af informationen i et raster (kvantiser). Dette førte til udviklingen af en effektiv metode ved navn JPEG via ISO/CCITT arbejdsgruppen af samme navn. JPEG står for Joint Photographic Expert Group.

JPEG-kompression er mindre effektiv end visse andre metoder som fraktal kompresion, men har den fordel, at den som en standard er let tilgængelig og udbredt accepteret.

Ved udviklingen af JPEG-standarden var det vigtigste mål at stille en metode til rådighed, som kunne klare alle aspekter ved billedkompressionen. Herunder blev der særlig lagt vægt på følgende:

- Metoder til kompression uden datatab
- Metoder til kompression med datatab, men med justerbar kompressionsfaktor
- Algoritmerne skal have en ikke for høj kompleksitet
- Metodene skal kunne bruges på alle typer stillbilleder uden indskrænkning i farveopløsningen

De benyttede algoritmer skal være hurtige (både implementeret i hardware og som software) og lette at implementere. Vanskelige eller dyre metoder er ikke egnede som standard.

6.3 JPEG virkemåde

JPEG er en standard, der tager sigte på flest mulige af de krav som billeddatakompressionen stiller. Da der ikke findes en enkelt algoritme som kan alt, fastlægges rammen for forskellige metoder, som hver især giver gode resultater på bestemte delområder, i JPEG-standarden. Principielt findes der to basismetoder:

- en informationsbevarende kompressionsmetode (lossless mode)
- en kompressionsmetode med tab (lossy mode)

6.3.1 Informationsbevarende kompression

Den informationsbevarende kompressionsmåde er en metode til at komprimere billeddata, således at de efter dekompresion bit for bit fuldstændig svarer til originaldata. JPEG stiller en operationsmåde til rådighed herfor, nemlig lossless mode.

Alle kompressionsmetoder arbejder efter samme skema: De indkommne data bliver først transformeret over i en mængde af deskriptorer, for disse deskriptorer fremstilles en statistisk model (i almindelighed en kodningstabel), og herefter kodes deskriptorerne efter modellen.

Til lossless mode bruges differentiel pulskodemodulation (DCPM) til transformationen. Til kodningen står Huffman-kodning og aritmetisk kodning til rådighed. Denne form kommer især i anvendelse, hvor der absolut ikke tolereres fejl, f.eks. ved maskinel billedanalyse. Lossless mode er imidlertid ikke den normale form for JPEG-anvendelse, idet den opnåede kompressionsfaktor ikke er særlig høj.
Figur 6.1: Principippet i baseline codec. Øverst kodning af originalbilledet (bil.) via forward DCT, kvantisering og kodning. Nederst dekodning i omvendt rækkefølge, resulterende i et gendannet billede (gbil).

6.3.2 Tabsgivende kompression

I modsætning til de informationsbevarende metoder svarer de dekodede billeddata her ikke længere nøjagtigt til de oprindelige billeddata. Begrebet tab er her lettere vildledende: det er ikke hovedsagelig billedkvaliteten, der går tabt, men information, der til en vis grad er redundant. Således er kompressionsforhold på op til 20:1 mulige uden at man kan sætte værdig forskel i forhold til originalbilledet. Undersøgelser af JPEG-gruppen viste at 8×8 diskret cosinustransformation (DCT) gav de bedste resultater ved de tabsgivende konverteringsmetoder. For de operationer, der bygger på DCT blev der fastlagt en minimal-algoritme (baseline codec) (codec er en forkortelse for coder-decoder) på hvilken alle JPEG-metoderne bygges. Komprimering med baseline codec består hovedsageligt af 5 trin

1. Konvertering af billedet i \( YC_bC_r \)-farverummet
2. Farvesubsampling
3. Diskret Cosinustransformation (DCT)
4. Kvantisering af DCT-koefficienterne
5. Kodning af koefficienterne

Figur 6.1 viser principippet i baseline codec. JPEG-standarden foreskriver 3 operationsmåder (modes), som benyttes ved den diskrete cosinustransformation:

Sequential Mode: Billeddata kodes i et gennemløb fra øverst til venstre til nederst til højre i billedet. Hvis et billede består af flere komponenter bliver disse ikke kodet efter hinanden (altså komponent efter komponent) men komponenterne bliver behandlet overlappende. Ved denne overlappede behandling er det kun nødvendigt at have en lille buffer til rådighed, da det er muligt straks at udlæse billeddata f.eks. til parallelt arbejdende processer, uden at det er nødvendigt at skulle vente til alle komponenter er bearbejdede. Denne måde kan bruges til de fleste anvendelser, giver den bedste kompression og er enklest at implementere.
**Progressiv Mode:** I den progressive mode gennemløbes billedet med flere gennemløb, hvor hver af disse kun koder en del af koefﬁcienterne. Herunder ﬁndes igen to grundlæggende virkemøder: I den ene bliver koefﬁcienterne sammelt svarende til frekvensbånd og de laveste frekvenser bliver kodet først. I den anden bliver koefﬁcienterne overført med stadig større nøjagtighed. JPEG kan dog også kombinere disse to grundmøder for at opnå bedre resultater. Ser man på resultatet af de enkelte gennemløb, så er billedelet først “uskarpt”. I løbet af transmissionen bliver det heretter mere og mere tydeligt. Denne mode kan med fordel benyttes ved billedtransmission. Må når ført hurtigt et indtryk af det overførte billede og kan afbryde forfølgen, når billedkvaliteten er tilfredsstillende.


### 6.4 Grundlæggende teknikker i JPEG-standarden

#### 6.4.1 YCbCr-farverummet


Monitorer i dataterminaler uddyter disse egenskaber, idet højenergetiske elektronstråler skydes mod særligt belagte områder i billedrøret, som hver især ved beskydning udsender lys svarende til en af disse tre farver. Alt efter strålene intensitet opstår forskellige farver. Herved tilordnes hver farve, der kan genereres, en vektor med tre elementer, RGB-værdien, der svarer til de tre farvestrålers intensitet ¹. Da disse intensiteter ikke er analoge værdier, men digitale signaler, er antallet af farver, det er muligt at vise på en billedskærm, begrunset. Dagens grafikkort har en oplysning på 255 trin (altså 8 bit) pr. grundfarve. Hermed kan der ﬁldes over 16 millioner genererbare farver, og da øjet kun kan skelne omkring 8 millioner forskellige farver, taler man om “true color” repræsentation.

Trefarveteorien siger også, at ikke alene rød, grøn og blå kan benyttes ved farverrepræsentationen, men andre egne farver kan også bruges som grundfarver. Der ﬁndes også andre farvemodeller, som ikke repræsenterer en farve ud fra grundfarver, men ved andre

¹F. eks. kan den RGB-farvekoordinering, der benyttes i X-windows-systemet, ses i ﬁlen /usr/local/X11R5/lib/X11/rgb.txt

64
egenskaber. For eksempel Lysstyrke-farvetone-modellen (luminans-krominans modellen). Her er kriterierne farvens lysstyrke, farven med den største andel (rød, grøn eller blå) og farvens mætning, f.eks. pastel, stærk, næsten hvid o.s.v. Denne farvemodel bygger på øjets evne til bedre at kunne skelne små lysstyrkeforskelle end små farveforskelle. Således kan en grå tekst skrevet på sort bedre læses end en blå skrevet på rød baggrund ved samme farve-
lysstyrke. Sådanne farvemodeller kaldes lysstyrke-farvetone-modeller (luminans-krominans modellen).

$YC_bC_r$-modellen er en sådan lysstyrke-farvetone model. Derved bliver en RGB-farveværdi opdelt i en grundlysstyrke $Y$ og to komponenter $C_b$ og $C_r$, idet $C_b$ er et mål for afvigelsen fra “middelfarven” grå i retning “blå”. På samme måde er $C_r$ et mål for afvigelsen mod rødt. Denne repræsentation benytter sig af den egenskab, at øjet er mere følsomt overfor grønt lys. Den meste information findes i grundlysstyrken $Y$, og ved anvendelserne behøver man blot at angive afvigelserne mod Rød og Blå. For at omregnne en farveværdi givet i RGB-repræsentation til $YC_bC_r$ farverummet har man brug for følgende formel:

$$
\begin{pmatrix}
Y \\
C_b \\
C_r
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\
-0.168 & -0.331 & 0.500 \\
0.500 & -0.419 & -0.081
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\
G \\
B
\end{pmatrix}
$$

(6.1)

Transformationen tilbage til RGB-værdier fra $YC_bC_r$-farverummet sker således

$$
\begin{pmatrix}
R \\
G \\
B
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.402 \\
1.0 & -0.344 & -0.714 \\
1.0 & 1.772 & 0.0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\
C_b \\
C_r
\end{pmatrix}
$$

(6.2)

### 6.4.2 Farvesubsampling

Da øjet kun dårligt opfatter små positionsbestemte forskelle i $C_b$ og $C_r$, kan man spare på den spatiale opløsning i $C_b$ og $C_r$. Dette sker ved, at man indenfor små områder danner middelværdien af $C_b$ og $C_r$ og i stedet for at kode $C_b$ og $C_r$ i ethvert punkt benytter middelværdien i hele området. Normalt har området en størrelse på 2 x 2 pixels.

### 6.4.3 Differentiel pulskodemodulation

I JPEG benyttes differentiel pulskodemodulation til tabsfri kodning. Pulkodemodulation er kendt fra audioteknik. Her bliver et lydsignal ved sampling, d.v.s. digitalisering, aftastet med lige store tidsintervaller og de målte analoge værdier bliver omsat til digitale værdier. Ved billeddata er forholdet det samme. Et billede bliver her (f.eks. ved indscanning) gennemløbet ved ens afstandsintervaller og de analoge farveværdier bliver digitaliserede. Audioteknikkens aftastningsfrequens svarer til det scannede billede opløsning. Når billed-
data skal komprimeres ved hjælp af JPEG, foreligger dette allerede i et digitalt format. Der findes endog scannere og digitale fotoapparater, der direkte leverer output i JPEG-
formatet.

Ved JPEG metoden lagres disse data ikke ubearbejdet. Givet data har man allerede
kodet indtil et vist sted. En særlig forudsigelsesmetode giver nu en mulig værdi for de
næste data. Her kodes kun forskellen mellem den forudsagte værdi og originalværdien. Jo

6.5 Billedtransformationskodning

I det foregående afsnit så vi på reversible kodningsprocedurer, d.v.s. metoder med hvilke vi kan genvinde det originale billede (lossless coding). Nu vil vi se på irreversible kodningsmetoder. De er af særlig interesse til kodning af billeder, hvor et vist informationstab kan toleres, hvis billedføringelsen i forhold til originalbilledet kan accepteres af det menneskelige øje.

Billeder er kendtegnet ved en høj grad af redundans (overflødig information), fordi der normalt er en stor korrelation imellem naboelementer. Desuden, da langsommere variationer i gråtoneværdier forekommer hyppigere end hurtige variationer er det muligt at konstruere kodningsmetoder, der udnytter denne kendsgerning. Et eksempel herpå er billedtransformationskodning ved hjælp af den diskrete cosinustransformation (DCT).

Vi antager, at det digitaliserede billede er til rådighed som en matrix bestående af heltal. F.eks kan hvert matrixelement angive gråtoneværdien af det tilsvarende billedpunkt (pixel) for et gråtonebillede. Hyppigt bruges der 8 bit til at kode gråtoneværdien med (255 = hvid, 0 = sort).

6.5.1 Den diskrete cosinustransformation

Det er nemmest at illustrere metoden ved først at cosinustransformere et /'endimensionalt signal, og, efter at principippet er forstået, undersøge kodningen af todimensionale billeder. Derfor ser vi først på en et array af heltal. Dette array opdeles i enheder af fast længde (vektorer), som vi her sætter til at have længden \( N \), hvor \( N \) er en potens af 2.

En diskret vektortransformation er blot et skift til et andet koordinatsystem for repræsentation. Som eksempel er den diskrete cosinustransformation (DCT) af en vektor
\{x_m\}, m = 0, 1 \ldots N - 1 defineret ved
\[ \mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{6.3} \]
hvor \(\mathbf{x}\) er vektoren, der indeholder signalværdierne, \(\mathbf{X}\) er en vektor med DCT-koefficienterne, og \(\mathbf{A}\) er matricen indeholdende det nye systems basisvektorer. Elementerne i basisvektormatricen er givet ved
\[ a_{k+1,m+1} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left(\frac{(2m + 1)k\pi}{2N}\right), \text{ hvor } k = 1, 2, \ldots, N - 1 \text{ og } m = 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{6.4} \]
og
\[ a_{1,m+1} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{ m = 1, 2, \ldots, N - 1} \tag{6.5} \]

For eksempel for \(N = 8\) finder vi
\[
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 \\
0.490 & 0.416 & 0.278 & 0.098 & -0.098 & -0.278 & -0.416 & -0.490 \\
0.462 & 0.191 & -0.191 & -0.462 & -0.462 & 0.191 & 0.191 & 0.462 \\
0.416 & -0.098 & -0.490 & -0.278 & 0.278 & 0.490 & 0.098 & -0.416 \\
0.354 & -0.354 & -0.354 & 0.354 & 0.354 & -0.354 & -0.354 & 0.354 \\
0.278 & -0.490 & 0.098 & 0.416 & -0.416 & -0.098 & 0.490 & -0.278 \\
0.191 & -0.462 & 0.462 & -0.191 & -0.191 & 0.462 & -0.462 & 0.191 \\
0.098 & -0.278 & 0.416 & -0.490 & 0.490 & -0.416 & 0.278 & -0.098
\end{pmatrix} \tag{6.6} \]

Det er let at vise, at \(\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_8\), hvor \(\mathbf{I}_8\) er enhedsmatricen af orden 8.

D.v.s. for at udføre kodningen med DCT, skal signalet deles i en sækvens af blokke (vektorer) og derpå kodes ved hjælp af sættet af orthonormale basisvektorer.

### 6.5.2 Todimensional DCT

En todimensional (forward) diskret transformation er defineret ved
\[ F(u, v) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} f(i, j) a(i, j, u, v) \tag{6.7} \]

Hvis en transformationskerne \(a(x, y)\) kan udtrykkes som produktet af en funktion i hver af de to variable \(x\) and \(y\), kaldes transformationen separabel, d.v.s. \(a(x, y) = a_1(x)a_2(y)\).

Den todimensionale DCT er separabel, idet kernen \(a(i, j, u, v)\) kan skrives som
\[ a(i, j, u, v) = a_1(i, u)a_2(j, v). \tag{6.8} \]

Følgelig kan 2-D DCT’en udtrykkes som
\[ F(u, v) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} f(i, j) a_1(i, u)a_2(j, v). \tag{6.9} \]

som kan skrives på matrix-formen
\[ \mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{f} \mathbf{A} \tag{6.10} \]

67
6.5.3 DCT-kodning i JPEG

Det menneskelige øje er ikke i stand til at opfatte svage farvenuancer nær så godt som svage forskelle i intensitet (lysstyrke). Derfor taler man ved farveforskelle om, at øjet har bedre oplysning ved lave end ved høje spatiale (rumlige) frekvenser. Analogien til frekvenser modsvarer øjets rumlige (spatiale) oplysningsevne. Ved bestemte farveforskelle kan man opfatte mere skelnerlig farveinformation (d.v.s. højere spatial frekvens) end ved andre farveforskelle. DCT udnytter disse egenskaber ved det menneskelige øjes perceptionsevne ved at den bortfiltere høje stedfrequenser og kode disse dårligt eller overhovedet ikke. Først bliver inputdata, der foreligger som fortægtslose heltal, bragt på en for DCT egnet kurveform. Man subtraherer ganske enkelt $2^{P-1}$ fra hver værdi, hvor $P$ repræsenterer den benyttede nøjagtighed i bit. I Baseline Codec er nøjagtigheden 8 bit, således at det nye "nullpunkt" lægges ved den oprindelige værdi 128. Så bliver billeddata opdelt i blokke på $8 \times 8$ pixel. En sådan blok bliver nu fortolket som en vektor bestående af 64 pixelværdier ud fra koefficienterne i et egnet vektorrum. DCT-en udfører herved et basis-skifte. Som basisvektorer anvendes kun 64 blokke å 8x8 pixels, som har den egenskab at de danner en orthonormalbasis med hensyn til vektorrummet. Basisvektorerne findes ved hjælp af følgende formel

$$C_{u,v} = \frac{1}{4} \gamma_u \gamma_v \sum_{m=0}^{7} \sum_{n=0}^{7} \cos \left( \frac{(2n+1)u\pi}{16} \right) \cos \left( \frac{(2m+1)v\pi}{16} \right)$$ \hspace{1cm} (6.11)$$

Ved basis-skiftet fås 64 entydige koefficienter, som giver antallet af tilsvarende basisblokke ud fra billeddatablokken. Koefficienterne beregnes således

$$F(u,v) = \frac{1}{4} \gamma_u \gamma_v \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} f(i,j) \cos \left( (2i+1)u\frac{\pi}{16} \right) \cos \left( (2j+1)v\frac{\pi}{16} \right)$$ \hspace{1cm} (6.12)$$

For at kunne transformere disse koefficienter tilbage til deres oprindelige form har man brug for følgende relation

$$f(i,j) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^{7} \sum_{v=0}^{7} \gamma_u \gamma_v F(u,v) \cos \left( (2i+1)u\frac{\pi}{16} \right) \cos \left( (2j+1)v\frac{\pi}{16} \right)$$ \hspace{1cm} (6.13)$$

hvor

$$\gamma_i = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{for } i = 0 \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

og $F(u,v)$ DCT-koefficienten og $f(i,j)$ den oprindelige pixelværdi.

Man kan betragte forward transformationen (FDCT) som en harmonisk analyserator og tilbagetransformationen (IDCT) som en harmonisk synthese. Ved denne ind- og afkodning (Codec) sker der tab uden ekstra behandling af koefficienterne, da de nødvendige sinus- og cosinusfunktioner kun kan repræsenteres med en begrænset nøjagtighed på en datamat. Heraf følger ligeledes, at denne metode ikke er iter'erbar, d.v.s. hvis et DCT-kodet billede bliver dekodet og derpå atter kodet, får man et andet resultat end efter den første kodning. Fordelen ved DCT bliver især tydelig ved billeder med kontinuerede farveovergange: da nabobilledpunkter som regel næppe kan skelnes, vil kun DC-koefficienten i koefficientfremstillingen (d.v.s koefficienten for den basisvektor som har frekvensen nul i begge

6.5.4 Kvantisering

Ved udviklingen af JPEG-standarden var det et af målene, at kompressionsparametren skulle kunne vælges frit. Dette opnås ved hjælp af kvantiseringen. Kvantisering er en afbildning, hvor flere naboværdier afbildes på én ny værdi, hvorved koefficienterne divideres med en kvantiseringsfaktor q(u, v) og afrundes til nærmeste integerværdi. Hertil bruges følgende ligning

\[ F^Q(u, v) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{F(u, v)}{q(u, v)} \right] \]  

(6.14)


6.5.5 Koefficientkodning

Kodning af de kvantiserede koefficienter sker separat for DC- og AC-koefficienternes vendkommende. Ud fra 8x8 blokke bliver der dannet en sekventiel (endimensional) bitstrøm bestående af 64 heltal (integers). DC-koefficientens første værdi er dog ikke den oprindelige værdi, men, som beskrevet under DCPM, differensen til DC-koefficienten i den foregående blok. På grund af DC-koefficienternes sammenhæng (lille indbyrdes variation) fås også her betydeligt mindre tal end ved lagring af absolutværdien. De 63 AC-koefficienter bliver
frembragt som en zig-zag kurve (se fig. 6.3), hvorved der sker en ordning mod højere spatiale frekvenser. Men da de højere frekvenskomponenter ofte er små eller nul opnåes herved en for den videre kompression af billeddata gunstig rækkefølge.

6.5.6 Datakompression

De hidtil beskrevne metoder indeholder endnu ikke nogen eksplisit kompression men giver blot en, og ved kraftig kvantisering af DCT-koefficienterne, ret grov transformation af billeddata. For at kunne lagre de herved opnåede data i den mest muligt kompakt kodede form stiller JPEG-standarden flere effektive metoder til disposition. Disse er følgende:

- Repræsentation af variable-length-integers i stedet for heltal af fast længde
- Komprimering ved hjælp af Huffman-kodning
- Aritmetisk kodning

Aritmetisk kodning komprimerer bedre ned Huffman-kodning, men har den ulempe at være belagt med forskellige patenter, således at der skal betales licensgebyr for brugen heraf. Derfor benytter de fleste implementeringer Huffman-kodning.

Variable Length Integers

De hidtil beskrevne metoder har alle kun haft ét formål: man forsøger at transformere data således at man får en repræsentation med de mindst mulige tal. Men ved DCT er det muligt at tallene bliver 3 bit større. Men da mange koefficienter forsvinder i den efterfølgende kvantisering, betyder det ikke noget. Når små tal skal kodes, kan de lagres på mindre plads, således at der kan spares lagerplads. Ved fast præcision (f.eks. 8 bit) kræver små tal lige så meget plads som store tal. Her kommer metoden variable-length-integers (VLI) til hjælp, idet man kan kode heltalsværdier med variabel længde. Det er naturligvis nødvendigt for senere at kunne genskabe værdien at angive værdiens længde samtidig med
<table>
<thead>
<tr>
<th>Bit</th>
<th>Værdi</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>-1,1</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-3, -2, 2, 3</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>-7, ..., -4, 4, ..., 7</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>-15, ..., -8, 8, ..., 15</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>-31, ..., -16, 16, ..., 31</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>15</td>
<td>-32767, ..., -16384, 16384, ..., 32767</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tabel 6.1: Kodning af variabel-længde heltal (VLI).

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bit</th>
<th>Bits.Fortegn.Kode</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>000.</td>
</tr>
<tr>
<td>-1</td>
<td>001.1</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>011.0.00</td>
</tr>
<tr>
<td>-21</td>
<td>101.1.0101</td>
</tr>
<tr>
<td>124</td>
<td>111.0.111100</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tabel 6.2: Eksempler på VLI'er


$$ x \equiv \text{Bits.Fortegn.Kode} \quad (6.15) $$

hvor

$$ \text{Bits} = \lfloor \log_2 |x| \rfloor + 1 \quad (\text{Antal efterfølgende bit}) $$

$$ \text{Fortegn} = 1 \text{ hvis } x < 0 \text{ ellers, og} $$

$$ \text{Code} = |x| - 2^{\text{Bits}-1} \quad (x's \text{ VLI-kodning}) $$

Tabel 6.1 viser princippet for VLI-kodning og og 6.2 indeholder eksempler på VLI-kodning.

### 6.5.7 Huffman-kodning

Data, som er frembragt i lossless-mode ved hjælp af DPCM, bliver sendt uændret videre til Huffman-kodning. Fra de DCT-frembragte værdier foretages en særlig transformation for at frembringe en god Huffman-kodbar kodesevens. For DC- og AC-koefficienter benyttes forskellige fremgangsmåder. DC-koefficienterne bliver først kodet ved hjælp af DPCM, hvor udgangspunktet for DC-koefficienten er den forudgående blok, og heretter omdannet til en VLI-værdi. AC-koefficienterne bliver kodet ved hjælp af en særlig repræsentation. Den genererede værdi har formen
(Længde, Størrelse, Værdi)


Ud fra denne repræsentation ses det, at det er fordelagtigt, hvis længst mulige sekvenser af nuller skal kodes. Nu er det også klart, hvorfor koefficienterne kodes efter zig-zag mønstrat. Efter omdannelse fra matrixform til en sekventiel bitstrøm er AC-koefficienterne sorteret, således at koefficienterne for de laveste frekvenser står først og de højeste spatiale frekvenser til sidst. Da værdierne svarende til de højeste frekvenser ofte er nul fremkommer herved lange nul-sekvenser.

Blandt disse nullfølger er der to med en særlig betydning. En nulsekvens, der går til slutningen af blokken kodes kun som blokslut (end-of-block, EOB) (undtagen når sekvensens begyndelse falder sammen med blokkens slutning). Denne koding har formen (0, 0). Værdi angives ikke. Kodede værdier på formen (15, 0) svarer til nulsekvenser, der er længere end 15 tegn. Også her ses bort fra kodningen af værdien (man antager implicit 0) og der kodes videre i den næste sekvens. Herunder er højst 4 repræsentationer af formen (Længde, Størrelse) direkte bagefter mulige, idet der efter den fjerde skal angives en Værdi.

Efter denne omformning sker den egentlige Huffman-kodning. De data, der skal kodes, undersøges først med hensyn til deres statistiske sammensætning, idet der konstrueres en tabel, som tilordner hvert symbol den hyppighed, hvormed det optræder i datamaterialet. Ud fra denne hyppighedstabel konstruerer algoritmen en Huffman-tabel, hvori hvert symbol, der optræder, får tilknyttet en ny ”digitaliseret” værdi. Den herved resulterende Huffman-kode er mere kompakt jo hyppigere et symbol i den oprindelige kode forekommer.

Denne konstruktion af Huffman-tabellen ud fra datamaterialet bruges ikke altid. Ofte anvendes prækonstruerede tabeller, som er genererede på grundlag af statistisk karakterisering af typiske datamaterialer. Hvis man skal opnå optimal Huffman-kodning er det dog nødvendigt at generere tabellen ud fra det foreliggende datamateriale.

Huffman-kodens effektivitet aflænger på den ene side af størrelsen af det benyttede kodealfabet, altså mængden af de forekommende symboler, og på den anden side af den stokastiske fordeling af data. Hvis data er ensartet fordelt er Huffman-algoritmen ikke særlig effektiv og kompressionraten tilsvarende lav.

Aritmetiske kodning

Aritmetisk kodning forsøger ligesom Huffman-kodning at kode hvert tegn med den ideale bitlængde, som svarer til tegnets informationsindhold (entropi). Huffman-kodning har imidlertid den ulempe at et bestemt tegn skal tilordnes netop en bitfølge med en given længde.

model tilordner den aritmetiske kode ikke et fast tal men et interval, der modsvarer sand-
synlighedens størrelse. Men da man betragter en kontekst bliver intervallet delt ved hvert 
efterfølgende tegn. Kodealgoritmen kan kode en vilkårlig værdi i dette interval.

Den af JPEG anvendte kodning kan kun kode to symboler: nul og et. Til brug herfor 
bliver kodealfabetet først omdannet til et binært afkodningstræ ligesom ved fremstillingen 
af oversættelsestabellen ved Huffman-kodningen. For en detaljørt beskrivelse af aritme-
tisk kodning henvises til Peter Johansens noter [10]. ved aritmetisk kodning benyttes 
selvfølgelig ikke prækodning med VLI.

6.5.8 Kodning af billeder med flere komponenter

Den datastrøm, der genereres ved hjælp af JPEG indeholder et eneste billed, hvor billedet 
kør sammensat af op til 255 billedkomponenter (kaldes også farve- eller spektralbånd 
ell eller kanaler). Den interne repræsentation af en komponent svarer til et todimensional 
array af billedpunkter med en vandret og lodret opløsning, der kan være forskellig fra 
komponent til komponent. Oftest er der ved farvebilleder de tre komponenter Y, C_b og 
C_r, men der er andre muligheder, f.eks. ved multispektrale billeder. Oplossningen i de tre 
farvekomponenter er normalt ikke ens. Således bliver forholdet Y:C_b :C_r reduceret til 2:1:1 
ved 2x2 farvesubsampling og til 4:1:1 ved 4x4 farvesubsampling. Den i’te komponent har 
dimensionen x_i x y_i. For at håndtere formater i hvilke nogle billedkomponenter样品 
med en anden oplossning end andre kan komponenter have forskellige dimensioner. Di-
mensionerne skal dog have en indbyrdes heltallig sammenhæng (af hensyn til kodningen 
in M-blokke, se senere). Denne defineres ved hjælp af H_i og V_i, de relative horisontale og 
vertikale samplingfaktorer, der skal angives for hver komponent. Den totale billedimen-
sjon X x Y defineres som maksimum af x_i og y_i for alle komponenter i billedet og kan 
være ethvert tal op til 2^{16}. H og V tillades kun at antage høltsalvärdierne fra 1 til 4. De 
kode parametre er X,Y samt H_i og V_i for hver komponent. Dekoderen rekonstruerer 
dimensionerne x_i og y_i for hver komponent ud fra følgende sammenhæng:

\[
x_i = \left\lfloor \frac{X \cdot H_i}{H_{max}} \right\rfloor
\]
\[
y_i = \left\lfloor \frac{Y \cdot V_i}{V_{max}} \right\rfloor
\]

hvor \( \lfloor \rfloor \) er betegner heltalsafrunding opad (ceiling). Disse oploesningsfaktorer bliver angivet 
for hver komponent i frameheaderen. Medens den DCT-baserede funktionstekede arbej-
der med 8x8 pixel blokke sker den tabsfri kodning pixel for pixel. JPEG definerer såkaldte 
dataenheder (data units, DU) til dette. I det første tilfælde er den en 8x8 blok, i det sidste 
tilfælde kun en pixel. Til kodningsproceduren bliver dataenhederne sammensat til mini-
malcode enheder (minimal coded units, MCU). Hvis et billed kun har en komponent 
bliver disse kode i rækkefølge og en MCU svarer til en dataenhed. Hvis et billed består 
af flere komponenter bliver disse af de ovennævnte grunde kodet overlappendt. En MCU er 
her en pakke med H_i x V_i dataenheder for hver komponent i. Fig. 6.4 illustrerer dette ved 
hjælp af to små billeder. På figur 6.4(a) er \( H = 2 \) og \( V = 1 \) for Y-blokkken og \( H = 1, V = 1 \) 
for de andre. På figur 6.4(b) er \( H = 1 \), \( V = 2 \) for Y-blokkken. Entropikoderen arbejder kun
Figur 6.4: Overlappet kodning og MCU-er

på hele MCU-er. Svarer billedets opløsning ikke til et helt antal MCU-er, bliver de sidste rækker eller søjler kødet flere gange. Afkoderen tager højde for denne redundans.

## 6.6 JPEG Interchange Format


Komprimerede data efter JPEG Interchange Format struktureres ved hjælp af såkaldte mærker (markers). Hver mærk identificerer begyndelsen af et mærkersegment. Hvert mærkersegment begynder med en byte FF (hex) fulgt af en anden byte, der angiver

6.7 Resumé

ved kodning af billeder tilgængelige via internettet (WWW) og som output fra digitale kamraer.
Litteratur


