

To ekstra beviser

I projektopgave P2 skal bruges at MAX-CUT er \mathcal{NP} -fuldstændig

- Viser $3\text{CNF-SAT} \leq_{\text{pol}} 3\text{CNF-NAESAT}$
- Viser $3\text{CNF-NAESAT} \leq_{\text{pol}} \text{MAXCUT}$

Skematisk bevis, læs selv detaljer

1

3CNF-NAESAT er \mathcal{NP} -fuldstændig

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Afgørighedsproblem

$$3\text{CNF-NAESAT} = \left\{ \langle \phi \rangle : \begin{array}{l} \text{hver clausul indeholder} \\ \text{sand og falsk literal} \end{array} \right\}$$

Bemærk at ϕ automatisk bliver sand

Bevis

- 1 Bevis at $3\text{CNF-NAESAT} \in \mathcal{NP}$
- 2 Vælg et kendt \mathcal{NP} -fuldstændigt problem: 3CNF-SAT
- 3 Beskriv en algoritme f som afbilder $3\text{CNF-SAT} \mapsto 3\text{CNF-NAESAT}$
- 4 Bevis at f opfylder
 $x \in 3\text{CNF-SAT} \Leftrightarrow f(x) \in 3\text{CNF-NAESAT}$ for alle $x \in \{0, 1\}^*$
- 5 Bevis at f kører i polynomiel tid.

2

Reduktion

Givet 3CNF-SAT udtryk

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$$

hvor

$$C_i = (l_1^i \vee l_2^i \vee l_3^i)$$

Konstruer 3CNF-NAESAT udtryk

$$\psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$$

ved at erstatte hver clausul C_i med

$$C_i = (l_1^i \vee l_2^i \vee z_i) \wedge (\neg z_i \vee l_3^i \vee b)$$

hvor z_i er en ny variabel for hver klausul, og b er en ny variabel for hele udtrykket ψ .

Eksempel

Givet 3CNF-SAT udtryk

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

konstruer

$$\psi = (x_1 \vee \neg x_4 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg x_2 \vee b) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee x_4 \vee b) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee z_3) \wedge (\neg z_3 \vee \neg x_4 \vee b)$$

3

$$x \in 3\text{CNF-SAT} \Rightarrow f(x) \in 3\text{CNF-NAESAT}$$

Antag at ϕ er sand, udvid løsning til

- 1 Hvis $l_1^i = l_2^i = \text{TRUE}$ så $z_i = \text{FALSE}$
- 2 Hvis $l_1^i = l_2^i = \text{FALSE}$ så $z_i = \text{TRUE}$
- 3 Hvis $l_1^i \neq l_2^i$ så $z_i = \text{FALSE}$
- 4 $b = \text{FALSE}$

$$\psi = (x_1 \vee \neg x_4 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg x_2 \vee b) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee x_4 \vee b) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee z_3) \wedge (\neg z_3 \vee \neg x_4 \vee b)$$

$$x \in 3\text{CNF-SAT} \Leftarrow f(x) \in 3\text{CNF-NAESAT}$$

Givet udtryk

$$\psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$$

tag variable x_1, \dots, x_n og tildel dem til ϕ .

Hvis sandt udtryk så slut

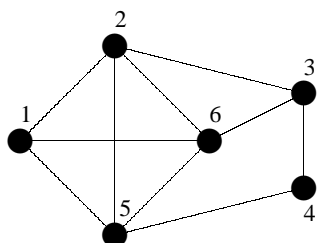
Hvis falsk udtryk, så findes klausul $C_i = (l_1^i \vee l_2^i \vee l_3^i)$ hvor $(l_1^i \vee l_2^i \vee l_3^i)$ alle er falske. Da b er falsk, og en af z_i og $\neg z_i$ altid er falsk, fandtes en klausul i Ψ hvor alle literaler var falske.

4

MAX-CUT

Afgørlighedsproblem

MAX-CUT = $\left\{ \langle G, K \rangle : \begin{array}{l} \text{der findes et cut } S, T \text{ med mindst} \\ K \text{ kanter mellem } S \text{ og } T \end{array} \right\}$



Hvis $\langle G, K \rangle$ er givet ved ovenstående graf, og $K = 6$ findes en ja-instans
 $S = \{1, 2, 3\}$, $T = \{4, 5, 6\}$.

5

MAX-CUT er \mathcal{NP} -fuldstændig

- 1 Bevis at MAX-CUT $\in \mathcal{NP}$
- 2 Vælg et kendt \mathcal{NP} -fuldstændigt problem 3CNF-NAESAT
- 3 Beskriv en algoritme f som afbilder 3CNF-NAESAT \mapsto MAX-CUT
- 4 Bevis at f opfylder $x \in 3\text{CNF-NAESAT} \Leftrightarrow f(x) \in \text{MAX-CUT}$ for alle $x \in \{0, 1\}^*$
- 5 Bevis at f kører i polynomiel tid.

Reduktion

Reduktions-algoritme f : Givet udtryk på 3CNF

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$$

hver klausul C_r har 3 forskellige literaler (l'_1, l'_2, l'_3) .

For eksempel

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

tilfredsstilles med $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$\phi = (0 \vee 1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0 \vee 1)$$

6

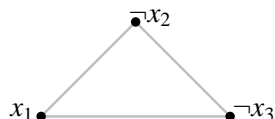
Reduktion

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

- hver variabel x_i repræsenteres af to knuder x_i og $\neg x_i$



- for hver klausul $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ tegnes trekant



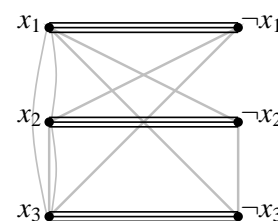
- mellem hvert par af knuder x_i og $\neg x_i$ tegnes n_i kanter, hvor n_i er antal forekomster af x_i og $\neg x_i$ i ϕ



- cutstørrelse sættes til $K = 5k$ hvor k er antal klausuler

7

Eksempel på reduktion



$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Fortolkning af snit (S, T)

- Knuder i S svarer til at variabel er TRUE
- Knuder i T svarer til at variabel er FALSE
- Vi skal sikre at x_i og $\neg x_i$ er i forskellige mængder
- Hvis en trekant (klausul) splittes op af (S, T) så er en literal sand og en anden falsk
- En trekant (klausul) bidrager med 2 kanter uanset hvordan den splittes op

8

MAX-CUT medfører 3CNF-NAESAT

Antag at MAX-CUT på (G, K) hvor $G = (V, E)$ og $K = 5k$ er sand.

Første $3k$ kanter

- Vi kan antage at snittet adskiller variable fra deres negation da en literal højst bidrager med n_i kanter i klausulerne, hvilket ikke overstiger antal kanter mellem x_i og $\neg x_i$.
- Antal kanter mellem x_i og $\neg x_i$ for $i = 1, \dots, m$ er $3k$ da antal literaler er $3k$.

Resterende $2k$ kanter

- Må komme fra klausuler (trekanter)
- Hver klausul bidrager med 2 kanter i snit, så alle må være blevet splittet
- Opsplitning af en trekant betyder at en literal er sand og en literal er falsk

3CNF-NAESAT medfører MAX-CUT

Simpel (prøv selv)