

Videregående Algoritmik

DIKU, 4 timers skriftlig eksamen, 25. januar 2008

David Pisinger, Pawel Winter, Christian Wulff-Nilsen

Alle hjælpemidler må benyttes dog ikke lommeregner eller computer. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen.

Opgavesættet består af 19 opgaver, navngivet Q1-Q19. Opgaverne Q1-Q4, Q6-Q9 og Q11-Q17 er *multiple-choice opgaver*, som har netop ét korrekt svar. For at besvare en sådan opgave skal man, uden yderligere forklaring, skrive opgavens nummer samt den korrekte svarmulighed. For eksempel kan opgave Q1 besvares med "1A". Q5, Q10, Q18 og Q19 er sædvanlige *tekstopgaver*, som skal besvares tilstrækkeligt detaljeret til at løsningsmetoden kan følges. Hvert korrekt svar til en *multiple-choice opgave* giver 4 point. Hvert korrekt svar til en *tekstopgave* giver 10 point. Man kan samlet opnå 100 point.

LP på standard form

Lad $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2, b_1, b_2$ være ikke-negative reelle tal. Hvilket af nedenstående LP problemer (hvis nogen) er på standard form?

Q 1:

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 1A) | maximer $c_1x_1 - c_2x_2$
hvor $a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq b_2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ | 1D) | maximer $c_1x_1 - c_2x_2$
hvor $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$
$a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq b_2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ |
| 1B) | maximer $c_1x_1 - c_2x_2$
hvor $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ | 1E) | minimer $c_1x_1 - c_2x_2$
hvor $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq -b_1$
$a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \geq -b_2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ |
| 1C) | minimer $c_1x_1 - c_2x_2$
hvor $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq -b_2$
$x_1 \geq -5, x_2 \geq 0$ | 1F) | Ingen af ovenstående |

■

Dual til et LP problem

Lad P være et LP-problem med

- n variable, hvoraf n^+ , $0 < n^+ < n$, er ikke-negative og resten kan antage vilkårlige reelle værdier,

- m begrænsninger, hvoraf
 - m^{\leq} , $0 \leq m^{\leq} \leq m$, er “mindre end eller lig med”-begrænsninger.
 - m^{\doteq} , $0 \leq m^{\doteq} \leq m$, er “lig med”-begrænsninger.
 - $m^{\geq} = m - m^{\leq} - m^{\doteq}$ er “større end eller lig med”-begrænsninger.

Q 2: Antag at metoden beskrevet i afsnit 29.1 i Cormen benyttes til at omskrive P til et problem på standard form. Hvor mange begrænsninger og variable (bortset fra begrænsninger der tvinger variable til at være ikke-negative) har det duale problem?

- 2A) n begrænsninger, $m^{\leq} + m^{\doteq} + m^{\geq}$ variable.
- 2B) $2n - n^+$ begrænsninger, $m^{\leq} + 2m^{\doteq} + m^{\geq}$ variable.
- 2C) $n + n^+$ begrænsninger, $m^{\leq} + m^{\doteq} + m^{\geq}$ variable.
- 2D) $2n$ begrænsninger, $m^{\leq} + 2m^{\doteq} + 2m^{\geq}$ variable.
- 2E) $2n + n^+$ begrænsninger, $m^{\leq} + m^{\doteq} + m^{\geq}$ variable.
- 2F) Ingen af ovenstående.

■

Lovlige løsninger

Betragt følgende problem P

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & x_1 + x_2 \\ \text{hvor} & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Q 3: For hvilke værdier af s og t har P ingen lovlige løsninger?

- 3A) $s > 0, t > 0$
- 3B) $s \geq 0, t \leq 0$
- 3C) $s \geq 0, t$ vilkårligt
- 3D) $s \leq 0, t \leq 0$
- 3E) $s \geq 0, t \geq 0$
- 3F) Ingen af ovenstående

■

Basisløsninger

Betragt følgende LP problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & 8x_1 + x_2 \\ \text{hvor} & 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq -2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Q 4: Hvilken af nedenstående løsninger er den første basisløsning (inden pivotering) fundet af INITIALIZE_SIMPLEX:

- 4A) $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$
- 4B) $x_0 = x_1 = x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = -2$
- 4C) $x_0 = 0, x_1 = 7, x_2 = -2, x_3 = x_4 = 0$
- 4D) Ingen af ovenstående.

■

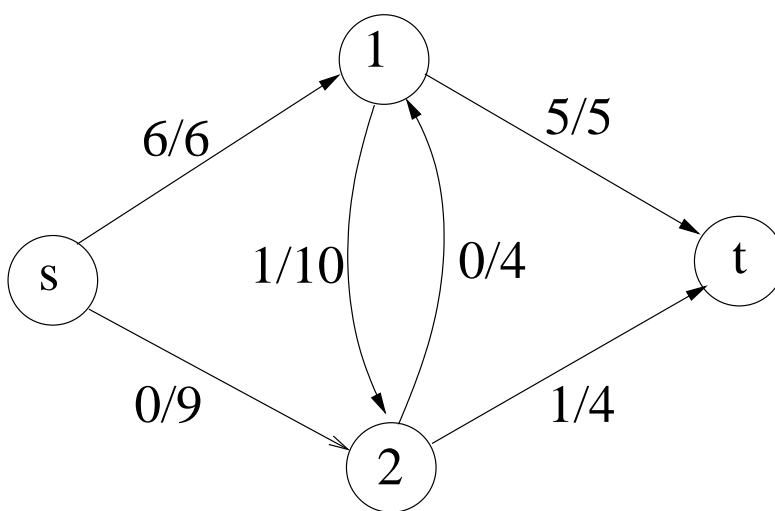
SIMPLEX

Betragt følgende LP problem

$$\begin{aligned} \text{maximer} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{hvor} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -2 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Q 5: (tekstopgave). Forklar hvordan SIMPLEX finder den første lovlige basisløsning og gennemfør den første pivoteringsiteration. ■

Residuel netværk



Figur 1: Flow netværk G

Figur 1 viser et flow netværk G med kilde s , dræn t og med strøm f . Det første tal ved en kant angiver hvor meget strøm løber igennem denne kant og det andet tal angiver kantens kapacitet.

Q 6: Hvor mange kanter har det residuele netværk G_f

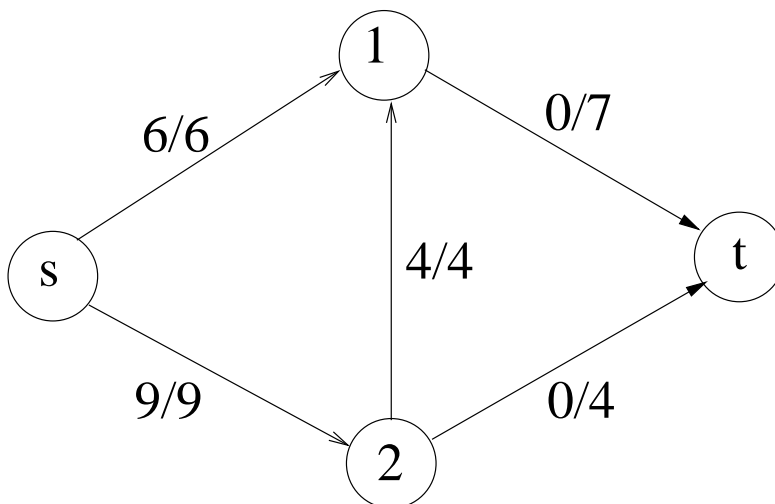
- | | |
|-------|---------------------------|
| 6A) 5 | 6D) 6 |
| 6B) 7 | 6E) 8 |
| 6C) 9 | 6F) Ingen af ovenstående. |

Minimalt snit

Q 7: Hvilket snit i G vist i figur 1 er minimalt?

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 7A) $(\emptyset, \{s,1,2,t\})$ | 7B) $(\{s\}, \{1,2,t\})$ |
| 7C) $(\{s,1\}, \{2,t\})$ | 7D) $(\{s,2\}, \{1,t\})$ |
| 7E) $(\{s,1,2\}, \{t\})$ | 7F) $(\{s,1,2,t\}, \emptyset)$ |

Push-relabel algoritme



Figur 2: Preflow netværk H

Figur 2 viser et netværk H med kilde s og dræn t og med præstrøm f . Det første tal ved en kant angiver hvor meget præstrøm løber igennem denne kant og det andet tal angiver kantens kapacitet.

Q 8: Hvad er det mindste antal push operationer inden push-relabel algoritmen stopper? Det forudsættes at $h(s) = 4, h(1) = 1, h(2) = 0, h(t) = 0$ (se Cormen et al. for en definition af funktionen h).

- | | |
|-------|-------------------|
| 8A) 2 | 8B) 3 |
| 8C) 4 | 8D) 5 |
| 8E) 6 | 8F) 7 eller flere |

■

Minimum-cost flow problemet

I det generelle minimum-cost flow-problem (GMCFP) er der givet en orienteret graf $G = (V, E)$. For en knude $v \in V$ lader vi $\delta^+(v)$ betegne alle udgående kanter fra v , og $\delta^-(v)$ betegne alle indgående kanter til v .

- Hver knude $v \in V$ har et *demand* $b_v \in \mathbb{R}$.
- Hver kant $e \in E$ har en *nedre kapacitet* $l_e \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ og en *øvre kapacitet* $u_e \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- Hver kant $e \in E$ har en *omkostning* $c_e \in \mathbb{R}$.

En b -strømning (eller b -flow) er en tildeling af reelle tal x_e til hver kant $e \in E$ således, at

$$\begin{aligned}x_e &\geq l_e, \forall e \in E \\x_e &\leq u_e, \forall e \in E \\ \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e &= b_v, \forall v \in V\end{aligned}$$

I GMCFP ønskes en b -strømning i G med *minimal* total omkostning, hvor omkostningen af en kant $e \in E$ med strømning x_e er $c_e x_e$. Vi vil opfatte en instans af GMCFP som en tupel (V, E, b, l, u, c) bestående af en graf med demands for knuder og kapaciteter og omkostninger for kanterne.

Betragt en instans $I = (V, E, b, l, u, c)$ af GMCFP hvor det for alle kanter $e \in E$ gælder, at $l_e \in \mathbb{R}$ eller $u_e \in \mathbb{R}$. Antag at denne instans har en b -strømning og lad $\{x_e | e \in E\}$ være en b -strømning med minimal omkostning c_{\min} . Definer $E_1 = \{e \in E | l_e = -\infty\}$ og $E_2 = E \setminus E_1$.

Der eksisterer en instans $I' = (V', E', b', l', u', c')$ af GMCFP med samme knude- og kantmængde som I bortset fra, at kanter $e \in E_1$ orienteres modsat i E' . Instansen I' har en b' -strømning af minimal omkostning c_{\min} således, at strømmingen gennem hver kant i E' er den samme som strømmingen gennem den tilsvarende kant i E bortset fra et eventuelt fortegnsskift. Der gælder $l'_e \in \mathbb{R}$ for alle kanter $e \in E'$. Desuden gælder $b'_v = b_v$ for alle knuder v , og for alle kanter $e \in E_2$ gælder $c'_e = c_e$, $l'_e = l_e$ og $u'_e = u_e$.

Bemærk at bestemmelse af I' svarer til et af reduktionstrinene i P1-opgaven.

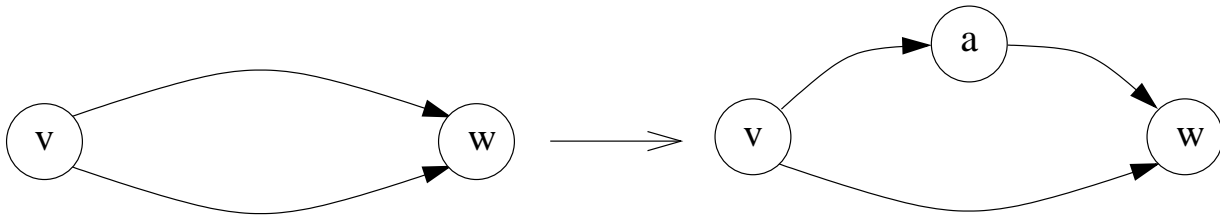
For at I' skal give mening, tillader vi i første omgang flere kanter mellem samme ordnede knudepar i (V', E') . For hver kant $(v, w) \in E_1$ vil vi med (w, v) betegne den modsat orienterede kant i $E' \setminus E_2$.

Q 9: Hvorledes skal omkostninger og kapaciteter for de modsat orienterede kanter i I' defineres?

- 9A) $\forall (v, w) \in E_1 : c'_{(w,v)} = c_{(v,w)}, l'_{(w,v)} = u_{(v,w)}, u'_{(w,v)} = l_{(v,w)},$
- 9B) $\forall (v, w) \in E_1 : c'_{(w,v)} = c_{(v,w)}, l'_{(w,v)} = -u_{(v,w)}, u'_{(w,v)} = -l_{(v,w)},$
- 9C) $\forall (v, w) \in E_1 : c'_{(w,v)} = -c_{(v,w)}, l'_{(w,v)} = u_{(v,w)}, u'_{(w,v)} = l_{(v,w)},$
- 9D) $\forall (v, w) \in E_1 : c'_{(w,v)} = -c_{(v,w)}, l'_{(w,v)} = -u_{(v,w)}, u'_{(w,v)} = -l_{(v,w)},$
- 9E) Ingen af ovenstående.

■

For at undgå flere kanter mellem samme ordnede knudepar i I' kan visse kanter $(v, w) \in E'$ erstattes af to kanter (v, a) og (a, w) , som vist i figur 3. Demands, kapaciteter og omkostninger vælges passende, så det er let at komme fra en optimal løsning for denne instans til en optimal løsning til instansen I . Dermed fås en instans med $\Theta(V + E)$ knuder og $\Theta(E)$ kanter.



Figur 3: Der indsættes knuder for at undgå flere kanter mellem samme ordnede knudepar.

Q 10: (tekstopgave) Beskriv en alternativ metode, der giver en instans med $\Theta(E)$ kanter og kun $\Theta(V)$ knuder. Instansen skal opfylde, at alle nedre kapacitetsgrænser er endelige, og det skal være nemt at komme fra en optimal løsning for denne instans til en optimal løsning for instansen I . (Hint: der er højst to kanter mellem hvert ordnet knudepar i (V', E') . Erstat visse knuder med par af knuder.) ■

Kvadratisk 0-1 optimering

Det kvadratiske 0-1 optimeringsproblem QP er givet ved

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_i x_j \\ & \text{subject to} && x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \end{aligned} \tag{1}$$

Betragt følgende instans med $N = \{1, 2, 3, 4\}$ hvor $k \in \mathbb{R}$ er et givet tal:

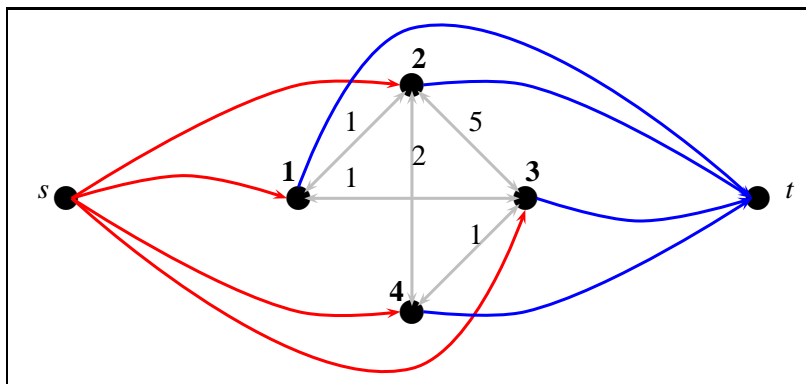
$i \setminus j$	1	2	3	4
1	k	1	1	0
2	1	k	5	2
3	1	5	k	1
4	0	2	1	k

(2)

For at løse instansen transformeres den til en instans af MAXIMUM-FLOW ved at sætte $V = N \cup \{s, t\}$ og $E = \{s\} \times N \cup N \times N \cup N \times \{t\}$. Kapaciteten af kanterne sættes til:

$$\begin{aligned} c_{si} &= \max\{0, \sum_{j \in N} d_{ij}\}, & i \in N \\ c_{ij} &= d_{ij}, & i, j \in N, i \neq j \\ c_{ii} &= 0, & i \in N \\ c_{it} &= \max\{0, -\sum_{j \in N} d_{ij}\} & i \in N \end{aligned}$$

Herved fremkommer følgende netværk, som vi betegner \mathcal{N} (dobbel-rettede kanter kan opfattes som to kanter i hver sin retning med samme kapacitet):



Q 11: Bestem værdierne af c_{si} og c_{it} for $k = -5$

11A) $c_{s1} = 0, c_{s2} = 3, c_{s3} = 2, c_{s4} = 0$
 $c_{1t} = 3, c_{2t} = 0, c_{3t} = 0, c_{4t} = 2$

11D) $c_{s1} = 0, c_{s2} = -3, c_{s3} = -2, c_{s4} = 0$
 $c_{1t} = -3, c_{2t} = 0, c_{3t} = 0, c_{4t} = -2$

11B) $c_{s1} = 3, c_{s2} = 0, c_{s3} = 0, c_{s4} = 2$
 $c_{1t} = 0, c_{2t} = -3, c_{3t} = -1, c_{4t} = 0$

11E) $c_{s1} = 2, c_{s2} = 0, c_{s3} = 0, c_{s4} = 2$
 $c_{1t} = 0, c_{2t} = 3, c_{3t} = 1, c_{4t} = 0$

11C) $c_{s1} = 2, c_{s2} = 8, c_{s3} = 7, c_{s4} = 3$
 $c_{1t} = 0, c_{2t} = 0, c_{3t} = 0, c_{4t} = 0$

11F) $c_{s1} = 2, c_{s2} = 8, c_{s3} = 7, c_{s4} = 3$
 $c_{1t} = 5, c_{2t} = 5, c_{3t} = 5, c_{4t} = 5$

■

Q 12: For $k = -5$, find et minimalt snit (S, T) i netværket \mathcal{N} . Hvad er kapaciteten af dette snit?

- 12A) $c(S, T) = 0$
- 12B) $c(S, T) = 1$
- 12C) $c(S, T) = 2$

- 12D) $c(S, T) = 3$
- 12E) $c(S, T) = 4$
- 12F) $c(S, T) = 5$



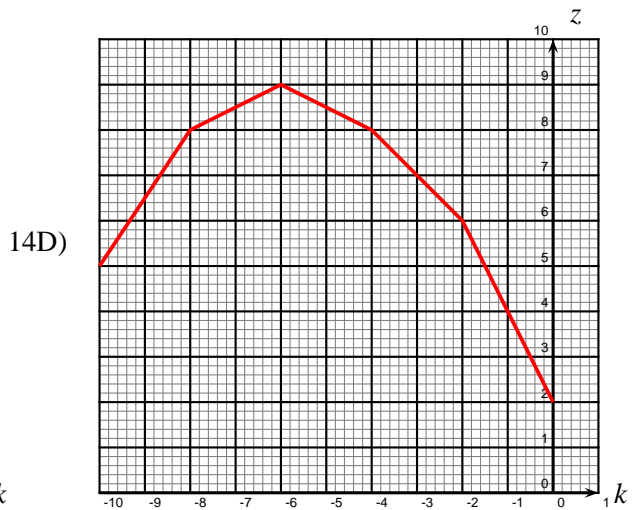
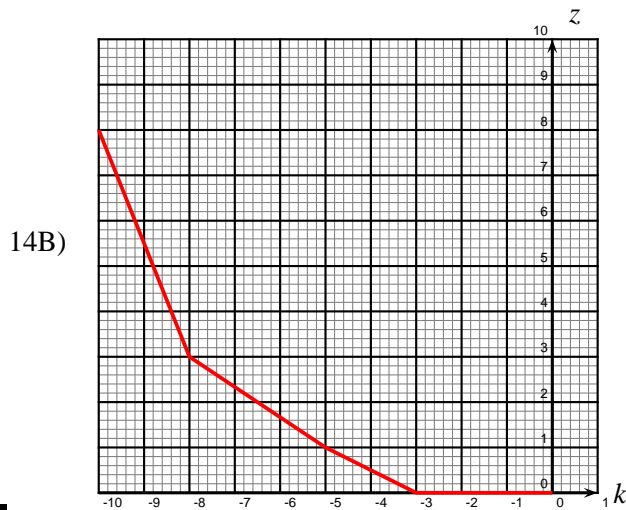
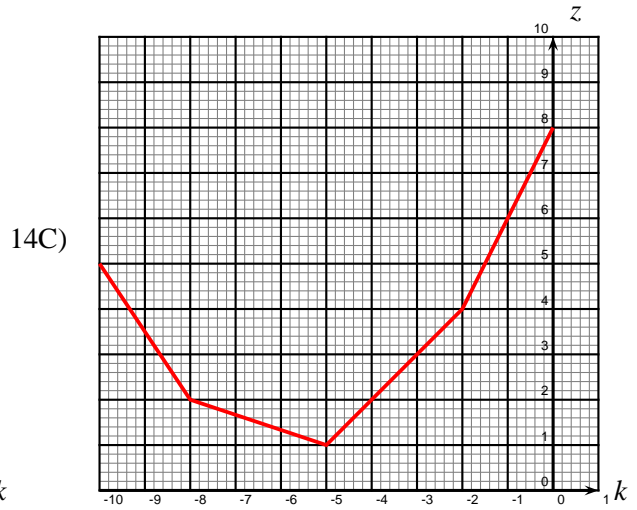
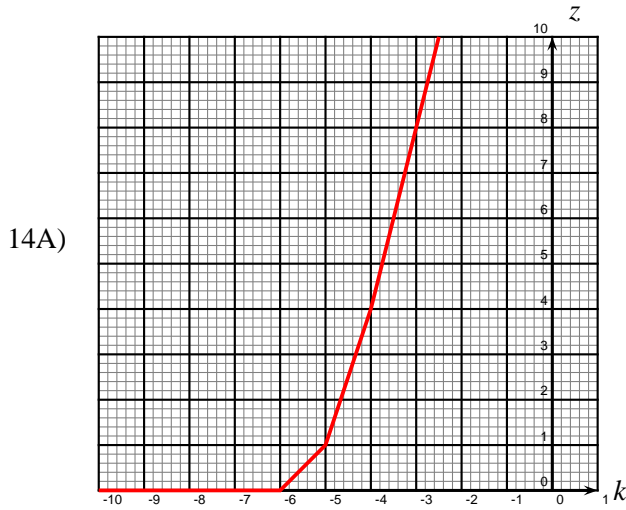
Q 13: Hvad er den optimale løsningsværdi z af den tilhørende QP-instans?

- 13A) $z = 0$
- 13B) $z = 1$
- 13C) $z = 2$

- 13D) $z = 3$
- 13E) $z = 4$
- 13F) $z = 5$



Q 14: Vi løser nu QP som funktion af k . Hvilken af følgende figurer svarer til objektfunktionen:



Q 15: Betragt nu følgende kvadratiske knapsack problem med omvendt begrænsning på kapaciteten:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j \\ & \text{subject to} && \sum_{j \in N} x_j \geq c, \\ & && x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \end{aligned} \tag{3}$$

Hvis vi Lagrange relaxerer kapacitets-begrænsningen fremkommer et problem på formen

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_i x_j - \lambda c \\ & \text{subject to} && x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \end{aligned} \tag{4}$$

Hvad er den korrekte definition af d_{ij} samt domæne af λ ?

- 15A) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$ 15D) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$
 $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$
- 15B) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$ 15E) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$
 $\lambda \leq 0$ $\lambda \leq 0$
- 15C) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$ 15F) $d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$
 $\lambda \geq 0$ $\lambda \geq 0$

■

Betragt følgende instans af det kvadratiske knapsack problem (3) givet ved profit matrixen (p_{ij}) og $c = 3$

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	-9	1	1	0
2	1	-9	5	2
3	1	5	-9	1
4	0	2	1	-9

(5)

Q 16: For hvilken værdi af λ får vi den strammeste (mindste) grænseværdi givet ved (4)

- 16A) $\lambda = 0$ 16D) $\lambda = 1$
 16B) $\lambda = 4$ 16E) $\lambda = -3$
 16C) $\lambda = 6$ 16F) $\lambda = -7$

■

Kryptering

I det følgende anvendes RSA krypteringssystemet. Din offentlige nøgle er $e = 5$ og $n = 35$. Du modtager en meddelelse et tegn ad gangen. Bogstaver modsvares af tallene ($A = 1, B = 2$, etc). Du modtager følgende meddelelse bestående af to tal:

5 1

Q 17: Afkod beskeden og find den afsendte tekst

17A) ET
17B) HM
17C) JA

17D) TO
17E) JO
17F) OK

■

Approximationsalgoritmer

Q 18: (tekstopgave) Givet en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$. VERTEX-COVER problemet søger det mindste antal knuder U således at alle kanter er incidente med en (eller to) knuder fra U .

Hvis vi bruger den binære variabel x_i til at angive om knude i ligger i U kan problemet formuleres som:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i \in V} x_i \\ & \text{subject to} && x_i + x_j \geq 1, \quad (i, j) \in E \\ & && x_i \in \{0, 1\} \quad i \in V \end{aligned} \tag{6}$$

Det LP-relaxerede problem, hvor vi erstatter sidste begrænsning med $0 \leq x_i \leq 1$ kan løses i polynomiel tid. Lad x^{LP} være en optimal løsning til det LP-relaxerede problem. Konstruer en approximeret løsning x^A ved at bruge følgende afrunding

$$x_i^A = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i^{LP} \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } x_i^{LP} < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

- Vis at x^A er en lovlig løsning til VERTEX-COVER.
- Vis at x^A er en 2-approximations algoritme. (hint: Brug LP-løsningen som nedre grænseværdi for løsningen).

■

NP-fuldstændighed

Q 19: (tekstopgave) En instans af 2-CNF-SATk består af et 2-CNF-udtryk ϕ med n boolske variable x_1, x_2, \dots, x_n og m klausuler, samt et tal k . Hver klausul består af 2 litteraler. F.eks.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

Afgørlighedsproblemet svarende til 2-CNF-SATk går ud på at afgøre om det er muligt at tildele værdier sand og falsk til de boolske variable x_1, x_2, \dots, x_n således at ϕ bliver sand, og således at højst k af de boolske variable er sande.

- Vis at 2-CNF-SATk ligger i klassen NP
- Vis at 2-CNF-SATk er NP-fuldstændigt ved reduktion fra afgørlighedsproblemet svarende til VERTEX-COVER

■

Vejledende svar

S 1 1D ■

S 2 2B ■

S 3 3F ■

S 4 4B ■

S 5 se Cormen et al. ■

S 6 6B ■

S 7 7E ■

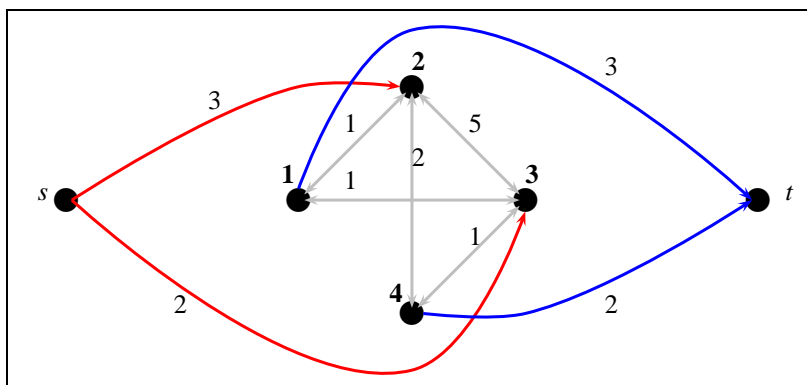
S 8 8C ■

S 9 For hver kant $(v, w) \in E_1$ sættes $l'_{(w,v)} = -u_{(v,w)}$ og $u'_{(w,v)} = -l_{(v,w)}$. Derved sikres, at $l'_e \in \mathbb{R}$ for alle $e \in E'$, samt at en strømning gennem en given kant i E_1 opfylder kapacitetsbegrænsningerne, hvis og kun hvis den negerede strømning i den modsat orienterede kant i instansen I opfylder kapacitetsbegrænsningerne. Ved at sætte $c'_{(w,v)} = -c_{(v,w)}$ for alle kanter $(v, w) \in E_1$ fås derfor samme minimale omkostning c_{\min} for I' som for I . ■

S 10 Hver knude $v \in V'$ med mindst en udgående eller indgående kant erstattes af to knuder v' og v'' , og der indsættes kanter (v', v'') og (v'', v') begge med omkostning 0, nedre kapacitetsgrænse 0 og øvre kapacitetsgrænse ∞ . Demands for v' og v'' vælges, så $b_{v'} + b_{v''} = b_v$. Kanter udgående fra og indgående til v fordeles nu på knuderne v' og v'' således, at der ikke er multiple kanter mellem ordnede knudepar på formen (v', w) , (w, v') , (v'', w) eller (w, v'') . Dette er muligt, da der højst er to kanter mellem hvert ordnet knudepar i (V', E') .

Det ses let, at den resulterende graf har de ønskede egenskaber. Antal knuder i denne graf er højst $2V' = O(V)$. Antal kanter er $O(E)$, idet hvert nyt kantpar, der indsættes, "betales" af en kant i E' udgående fra eller indgående til den knude, der gav anledning til kantparret. Hver kant i E' betaler højst to gange for et kantpar, der indsættes. ■

S 11 Vi finder $c_{s1} = 0$, $c_{s2} = 3$, $c_{s3} = 2$, $c_{s4} = 0$ og $c_{1t} = 3$, $c_{2t} = 0$, $c_{3t} = 0$, $c_{4t} = 2$ hvilket fører til følgende netværk



■

S 12 Det minimale snit er $S = \{2, 3, 4\}$, $T = \{1\}$ som har kapaciteten $c(S, T) = 4$. ■

S 13 Fra projektopgave P2 ved vi at den optimale løsningsværdi til QP findes som

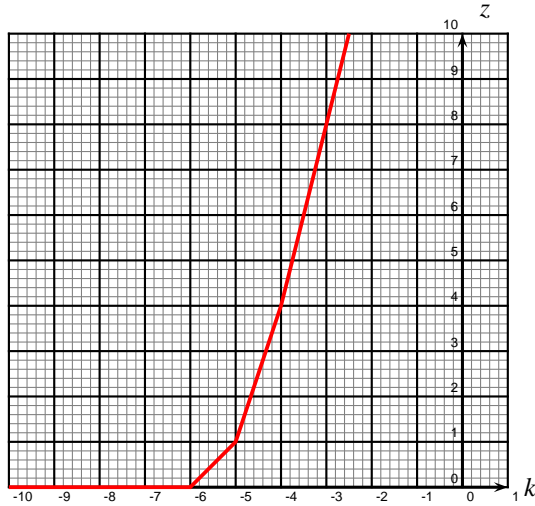
$$z = \sum_{i \in N} c_{si} - |f^*| = 5 - 4 = 1$$

Denne opnås ved at sætte $x_i = 1$ når $i \in S$, dvs. $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ mens $x_1 = 0$. ■

S 14 For $k \leq -8$ er $c_{si} = 0$ for alle i og dermed er et minimalt snit $S = \{s\}$ og $T = \{1, 2, 3, 4, t\}$. Dermed er den optimale løsning $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ med objektfunktion $z = 0$.

For $k \geq -2$ er $c_{it} = 0$ for alle i og dermed er et minimalt snit $S = \{s, 1, 2, 3, 4\}$ og $T = \{t\}$. Dermed er den optimale løsning $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ med objektfunktion $z = 20 + 4k$.

Så figur A) beskriver bedst objektfunktionen.



■

S 15 Det Lagrange relaxerede problem er

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j + \lambda \left(\sum_{j \in N} x_j - c \right) \\ & \text{subject to} && x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \end{aligned} \tag{8}$$

hvor $\lambda \geq 0$. Objektfunktionen kan omskrives til

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j + \sum_{j \in N} \lambda x_j x_j - \lambda c$$

Hvis vi sætter

$$d_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + \lambda & \text{hvis } i = j \\ p_{ij} & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

får vi den rigtige form. ■

S 16 Objektfunktionen som funktion af λ svarer til figuren fra opgave 14 for $k = -9 + \lambda$ tillagt konstantleddet $-\lambda c$. Den blå linie angiver $-\lambda c$ mens den grønne linie angiver $QP(k)$ for $k = -9 + \lambda$.



Det ses at minimum antages for $k = -5$ (eller $k = -4$) svarer til $-9 + \lambda = -5$ dvs $\lambda = 4$ (eller $\lambda = 5$). ■

S 17 Vi har $n = 7 \cdot 5$ så $\phi(n) = 6 \cdot 4 = 24$. Den multiplikativt inverse af $e = 5$ er $d = 5$ da $5 \cdot 5 = 25 = 1 \pmod{24}$. Vi finder at

$$\begin{aligned} 5^5 \pmod{35} &= 10 & (J) \\ 1^5 \pmod{35} &= 1 & (A) \end{aligned}$$

så den afsendte tekst er "JA". ■

S 18

- Grundet begrænsningen $x_i + x_j \geq 1$ i (6) vil der for hver kant $(i, j) \in E$ gælde at $x_i^{LP} \geq \frac{1}{2}$ eller $x_j^{LP} \geq \frac{1}{2}$. Afrundingsprincippet (7) sikrer dermed at mindst en af variablene x_i, x_j blive rundet op til 1, og dermed gælder for hver kant (i, j) at $x_i = 1$ eller $x_j = 1$.
- Vi vil med x^* betegne den optimale løsning til (6). Løsningen x^{LP} til det LP-relaxerede problem giver en nedre grænse for objektfunktionen

$$\sum_{i \in V} x_i^{LP} \leq \sum_{i \in V} x_i^*$$

Grundet afrundingsprincippet (7) gælder der for hvert i at $x_i^A \leq 2x_i^{LP}$ og dermed

$$\sum_{i \in V} x_i^A \leq 2 \sum_{i \in V} x_i^{LP} \leq 2 \sum_{i \in V} x_i^*$$

Hvilket giver os 2-approximationen



S 19

- a) Som certifikat bruger vi sandhedsværdierne af x_1, x_2, \dots, x_n . Vi kan kontrollere om ϕ er sand ved at evaluere udtrykket fra venstre mod højre i lineær tid. Endvidere kan vi kontrollere at højst k af variablene x_1, x_2, \dots, x_n er sande i lineær tid.
- b) I VERTEX-COVER er der givet en graf $G = (V, E)$ samt et tal c . Vi skal farve c af knuderne røde, således at hver kant er incident med mindst en rød knude.

Reduktionen af VERTEX-COVER til 2-CNF-SATk er som følger: For hver knude $i \in V$ i VERTEX-COVER indfører vi en variabel x_i i 2-CNF-SATk. For hver kant $(i, j) \in E$ i VERTEX-COVER indfører vi en klausul $(x_i \vee x_j)$ i 2-CNF-SATk. Endelig sætter vi $k = c$.

Hvis VERTEX-COVER er en ja-instans, findes der k knuder som kan farves røde således at alle kanter er incidente med en knude. Vi sætter de tilhørende boolske variable x_i til sand i 2-CNF-SATk, og får dermed en ja-instans.

Omvendt, hvis vi har en ja-instans til 2-CNF-SATk, vælger vi i VERTEX-COVER de knuder som svarer til sande boolske variable i 2-CNF-SATk. Der vil være c knuder som bliver farvet røde, og alle kanter vil være incidente med en rød knude.

Reduktionen kører i lineær tid.

