Videregående Algoritmik

DIKU, 4 timers skriftlig eksamen, 26. januar 2007

Martin Paluszewski, David Pisinger, Pawel Winter, Martin Zachariasen

Alle hjælpemidler må benyttes dog *ikke* lommeregner eller computer. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen.

Opgavesættet består af 19 opgaver, navngivet Q1-Q19. Opgaverne Q1-Q4, Q6-Q9 og Q11-Q17 er *multiple-choice opgaver*, som har netop ét korrekt svar. For at besvare en sådan opgave skal man, uden yderligere forklaring, skrive opgavens nummer samt den korrekte svarmulighed. For eksempel kan opgave Q1 besvares med "1A". Q5, Q10, Q18 og Q19 er sædvanlige *tekstopgaver*, som skal besvares tilstrækkeligt detaljeret til at løsningsmetoden kan følges. Hvert korrekt svar til en *multiple-choice opgave* giver 4 point. Hvert korrekt svar til en *tekstopgave* giver 10 point. Man kan samlet opnå 100 point.

LP på standard form

Q 1: Hvilket af nedenstående fire LP problemer er på standard form?

1A)
$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & 2x_1 - 6x_2 \\ \text{hvor} & 5x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 - 3x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 16x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1B)
$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{hvor} & 5x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

1C) Ingen af ovenstående

1D)
$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 10x_5 \\ \text{hvor} & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 5 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

1E)
$$\begin{array}{ll} \text{minimer} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \text{hvor} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Dual til et LP problem

Betragt følgende LP problem P:

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{hvor} & 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 4x_4 + 4x_5 \leq 8 \\ & 12x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 9 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 4x_5 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Q 2: Hvor mange begrænsninger (bortset fra de fem begrænsinger som tvinger samtlige variable til at være ikke-negative) har det duale problem DP?

2A) 2
2B) 3
2C) 4
2D) 5
2E) 6
2F) 9
2G) Andet

■

Basisløsning

Q 3: Betragt LP problemet fra det foregående spørgsmål. Omskriv det til et overskudsform (eng. slack form) med et passende antal overskudsvariable (eng. slack variables) $x_6, x_7, \ldots$ og afgør hvilken af nedenstående løsninger er den første lovlige basisløsning fundet af INITIALIZE_SIMPLEX:

3A) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$
3B) $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = 5, x_4 = 2, x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$
3C) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0$
3D) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x_6 = 8, x_7 = 9, x_8 = 5, x_9 = 2$
3E) $x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = 9, x_4 = 5, x_5 = 2, x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$
3F) Andet

■

Sekvenser af basisløsninger

Q 4: SIMPLEX finder i hver iteration en lovlig basisløsning. Hvilken af de nedenstående udsagn om sekvensen af værdier hørende til disse lovlige basisløsninger er korrekt?

4A) værdierne er stigende
4B) værdierne er ikke-faldende
4C) værdierne er ikke-stigende
4D) værdierne er faldende
4E) værdierne er tilfældige

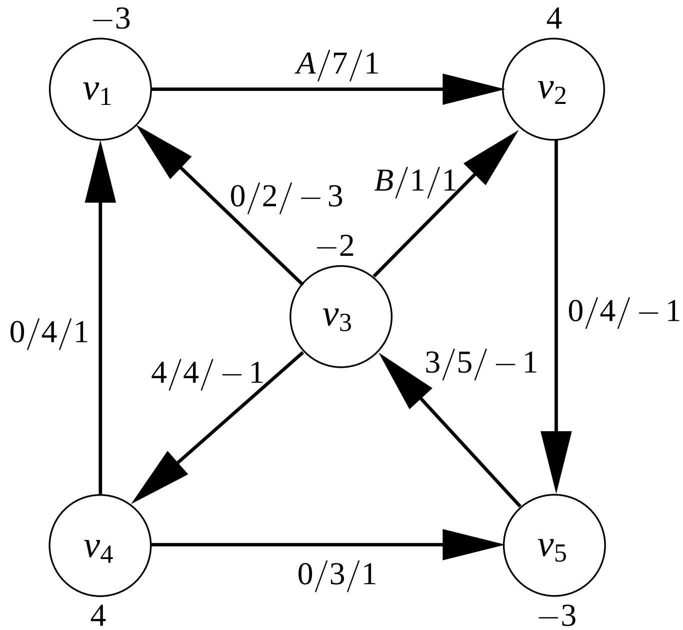
■

Bestemmelse af en lovlig basisløsning

Betragt følgende LP problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{hvor} & 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -5 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Q 5: (tekstopgave) Forklar hvordan SIMPLEX finder den første lovlige basisløsning og gennemfør den første pivoteringsiteration. ■



Figur 1: Graf med demands, kapaciteter, vægte og en b-strømning. Demands er angivet ud for hver knude, og for hver kant er tre tal angivet: strømning, kapacitet og vægt. Eksempelvis er $b_{v_1} = -3$, $x_{(v_5,v_3)} = 3$, $c_{(v_5,v_3)} = 5$ og $a_{(v_5,v_3)} = -1$.

Minimum-cost flow problemet

I minimum-cost flow (MCF) problemet er der givet en orienteret graf $G = (V, E)$. For en knude $v \in V$ lader vi $\delta^+(v)$ betegne alle udgående kanter fra v, og $\delta^-(v)$ betegne alle indgående kanter til v.

- For hver knude $v \in V$ er der et *demand* b_v, og der gælder at $\sum_{v \in V} b_v = 0$.
- For hver kant $e \in E$ har vi en *kapacitet* $c_e \geq 0$.
- For hver kant $e \in E$ har vi en *vægt* a_e.

En b-strømning (eller b-flow) er en tildeling af ikke-negative tal x_e til hver kant $e \in E$, således at

$$\begin{array}{rcl} x_e & \leq & c_e, \ \forall e \in E \\ \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e & = & b_v, \ \forall v \in V \end{array}$$

I MCF problemet ønskes en b-strømning i G med *minimal* total omkostning, hvor omkostningen af en kant $e \in E$ med strømning x_e er $a_e x_e$.

Q 6: I figur 1 er der givet et minimum-cost flow problem, samt en b-strømning x, hvor strømningen langs kanterne (v_1, v_2) og (v_3, v_2) er angivet som henholdsvis $x_{(v_1,v_2)} = A$ og $x_{(v_3,v_2)} = B$. Hvilken af følgende tildelinger til A og B giver en b-strømning for problemet i figur 1?

6A) $A = 4, \ B = 0$

6B) $A = 1, \ B = 1$

6C) $A = 3, \ B = 1$

6D) $A = 0, \ B = 4$

■

For en given b-strømning x defineres residualgrafen $G_x = (V_x, E_x)$ som følger: Knudemængden er den samme som for G, dvs. $V_x = V$. For hver kant $e = (u,v) \in E$ hvor $x_e < c_e$ har vi en kant $(u,v) \in E_x$ med vægten a_e. For hver kant $e = (u,v) \in E$ hvor $x_e > 0$ har vi en kant $(v,u) \in E_x$ med vægten $-a_e$. En kreds i G_x, hvor summen af kantvægtene er negativ, kaldes en *negativ* kreds.

Q 7: For residualgrafen G_x svarende til b-strømningen i figur 1, hvilket af følgende udsagn er korrekt?

7A) Kanten (v_4, v_3) har vægten 1 og kanten (v_5, v_3) har vægten -1.

7B) Kanten (v_4, v_3) findes ikke og kanten (v_5, v_3) har vægten -1.

7C) Kanten (v_4, v_3) har vægten 1 og kanten (v_5, v_3) findes ikke.

7D) Kanten (v_4, v_3) findes ikke og kanten (v_5, v_3) har vægten 1.

■

Q 8: For residualgrafen G_x svarende til b-strømningen i figur 1, hvilken af følgende knudesekvenser definerer en *negativ* kreds?

8A) $v_5 \to v_3 \to v_4 \to v_5$

8B) $v_3 \to v_1 \to v_4 \to v_3$

8C) $v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_2$

8D) $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$

■

Q 9: Lad nu x betegne en *vilkårlig* b-strømning for grafen i figur 1 (med de angivne demands og de givne kapaciteter). Hvilket af følgende udsagn er korrekt?

9A) Residualgrafen G_x har præcis 8 kanter.

9B) Residualgrafen G_x har ikke mere end 16 kanter.

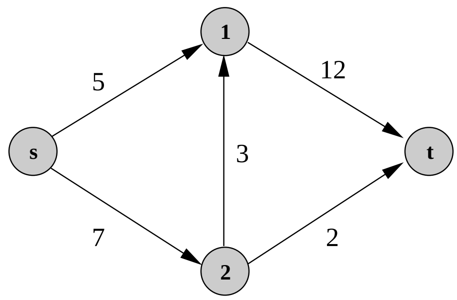
9C) Residualgrafen G_x har præcis 16 kanter.

9D) Residualgrafen G_x har præcis 5 kanter.

■

Maximum-flow problemet

Q 10: **(tekstopgave)**
Figur 2 viser et flow netværk med kilde s og dræn t.

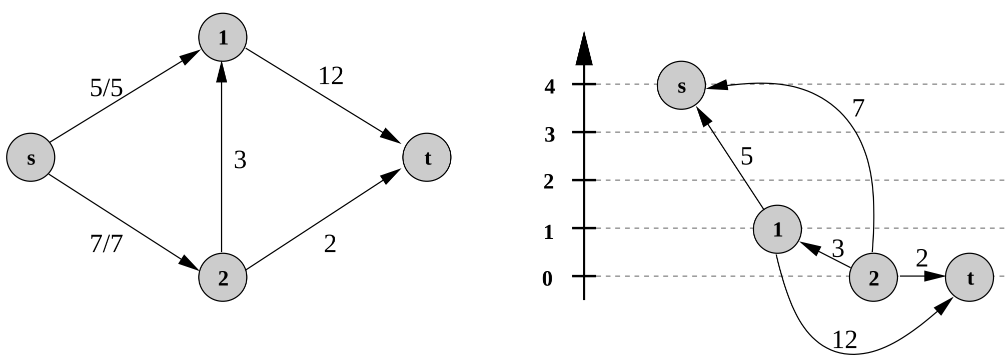


Figur 2: Flow netværk.

a) Vis at Ford-Fulkerson algoritmen for dette flow netværk kan benytte op til 4 iterationer for at finde et maximum flow. (En iteration består af identifikation af en strømforøgende sti, samt forøgelse af flowet langs denne sti.)

b) Vis at Edmonds-Karp algoritmen for dette flow netværk altid kræver præcis 3 iterationer.

c) Angiv et minimalt snit (minimum cut).



(a) (b)

Figur 3: Flow netværk med preflow, samt en gyldig højdefunktion.

Figur 3(a) viser et flow netværk med tilhørende preflow. Knuden s producerer et flow på 12 enheder, og de to udgående kanter fra s er dermed fyldt til deres kapacitet. Figur 3(b) viser residualnetværket for flow netværket i figur 3(a) samt en gyldig højdefunktion.

d) Det viste flow er et gyldigt preflow. Hvorfor er det ikke et gyldigt flow?

e) Hvilken knude tillader en relabel operation?

f) Hvilken kant tillader en push operation?

g) Udfør push operationen og vis det opdaterede preflow og residualnetværk.

■

Projektudvælgelse

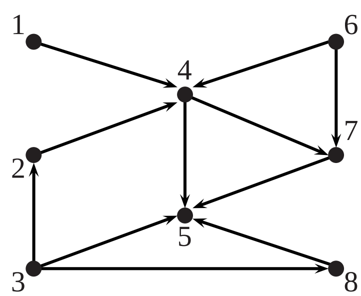
PROJECT-SELECTION optimeringsproblemet betragter en mængde V af projekter. Hvert projekt $i \in V$ har en tilhørende profit $p_i \in \mathbb{Z}$ som kan være positiv eller negativ. Endvidere har hvert projekt et tilhørende ikke-negativt ressourceforbrug $r_i \in \mathbb{N}$ og vi har en øvre grænse (*kapacitet*) d på ressourceforbruget. Endvidere er der givet en orienteret graf $G = (V, E)$, kaldet *kravgrafen*, hvor en kant $(i, j) \in E$ angiver at hvis projekt i vælges så kræves det at projekt j også vælges. Hvis vi bruger den binære variabel x_i til at angive om projekt i vælges, kan problemet formuleres:

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & \sum_{i \in V} p_i x_i \\ \text{hvor} & \sum_{i \in V} r_i x_i \le d \\ & x_i \le x_j, \qquad (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\}, \qquad i \in V \end{array}$$

Det tilhørende afgørlighedsproblem PROJECT-SELECTION-DECISION er givet ved

$$\text{PROJECT-SELECTION-DECISION} = \left\{ < V, E, p, r, d, k >: \begin{array}{ll} \sum_{i \in V} p_i x_i \ge k, & \\ \sum_{i \in V} r_i x_i \le d, & \\ x_i \le x_j, & (i,j) \in E \\ x_i \in \{0,1\}, & i \in V \end{array} \right\}$$

Betragt følgende instans af PROJECT-SELECTION problemet med $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, kapacitet $d = 10$, og kravgraf $G = (V, E)$ som angivet nedenfor



i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	8	5	6	3	-2	-1	-3	-2
r_i	3	2	4	1	2	3	2	1

Q 11: Hvilken af følgende løsninger er en ja-instans til ovenstående instans af PROJECT-SELECTION-DECISION med $k = 8$? (alle beslutingsvariable x_i er 0 hvis de ikke er eksplicit nævnt)

11A) $x_1 = 1$

11B) $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 1$

11C) $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$

11D) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$

11E) $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$

11F) $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1$

■

Betragt følgende relaxering af PROJECT-SELECTION givet som RELAXED-PROJECT-SELECTION:

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & \sum_{i \in V} p_i x_i - \lambda \left(\sum_{i \in V} r_i x_i - d \right) \\ \text{hvor} & x_i \le x_j, \qquad (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\}, \qquad i \in V \end{array}$$

Q 12: Hvad er objektfunktionen hvis vi benytter $\lambda = 1$ for den angivne instans?

12A) $8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 1x_6 - 3x_7 - 2x_8$

12B) $8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 1x_6 - 3x_7 - 2x_8 + 10$

12C) $11x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 0x_5 + 2x_6 - 1x_7 - 1x_8$

12D) $11x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 0x_5 + 2x_6 - 1x_7 - 1x_8 - 10$

12E) $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 4x_6 - 5x_7 - 3x_8$

12F) $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 4x_6 - 5x_7 - 3x_8 + 10$

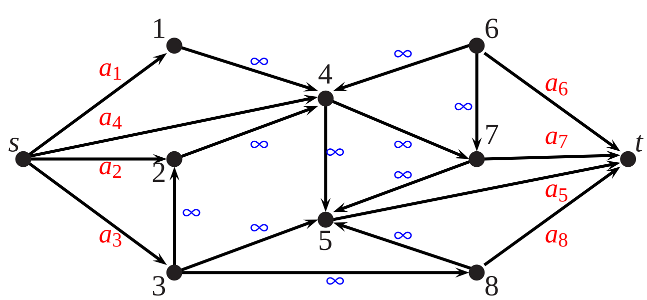
■

Hvis vi sætter $q_i = p_i - \lambda r_i$ i ovenstående model får vi (på nær en konstant) en instans af problemet UNCAPACITATED-PROJECT-SELECTION givet ved

$$\begin{array}{lll} \text{maximer} & \sum_{i \in V} q_i x_i & \\ \text{hvor} & x_i \leq x_j, & (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\}, & i \in V \end{array}$$

UNCAPACITATED-PROJECT-SELECTION kan transformeres til et MAXIMUM-FLOW problem som følger: Alle kanter i kravgrafen E får kapaciteten ∞. Vi tilføjer to nye knuder s,t. Hvis en knude (projekt) $i \in V$ har profit $q_i > 0$ tilføjer vi en orienteret kant (s,i) med kapacitet q_i. Hvis en knude $i \in V$ har profit $q_i < 0$ tilføjer vi derimod en kant (i,t) med kapacitet $-q_i$.

Q 13: Hvad er kapaciteten af kanterne $a_1, a_2, \ldots, a_8$ i MAXIMUM-FLOW problemet svarende til instansen fra opgave Q12?



13A) $a_1 = 5; a_2 = 3; a_3 = 2; a_4 = 2; a_5 = 4; a_6 = 4; a_7 = 5; a_8 = 3$

13B) $a_1 = 5; a_2 = 3; a_3 = 2; a_4 = 2; a_5 = -4; a_6 = -4; a_7 = -5; a_8 = -3$

13C) $a_1 = 4; a_2 = 4; a_3 = 5; a_4 = 3; a_5 = 5; a_6 = 3; a_7 = 2; a_8 = 2$

13D) $a_1 = -4; a_2 = -4; a_3 = -5; a_4 = -3; a_5 = 5; a_6 = 3; a_7 = 2; a_8 = 2$

13E) $a_1 = 11; a_2 = 7; a_3 = 10; a_4 = 4; a_5 = 0; a_6 = 2; a_7 = -1; a_8 = -1$

13F) $a_1 = 8; a_2 = 5; a_3 = 6; a_4 = 3; a_5 = 2; a_6 = 1; a_7 = 3; a_8 = 2$

■

Q 14: Løs MAXIMUM-FLOW problemet for instansen fra opgave Q13. Hvad er kapaciteten $c(S,T)$ af det minimale snit

14A) $c(S,T) = 5$

14B) $c(S,T) = 9$

14C) $c(S,T) = 11$

14D) $c(S,T) = 14$

14E) $c(S,T) = 15$

14F) $c(S,T) = 20$

■

Q 15: Hvad er den tilhørende løsningsværdi z_{RPS} til RELAXED-PROJECT-SELECTION? (Hint: brug resultaterne fra projektopgave P2)

15A) $z_{RPS} = 0$

15B) $z_{RPS} = 3$

15C) $z_{RPS} = 5$

15D) $z_{RPS} = 8$

15E) $z_{RPS} = 9$

15F) $z_{RPS} = 11$

■

Approximation

Givet en mængde X af elementer samt en familie $F = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ af mængder, hvor alle $S_i \subseteq X$. SET-COVER problemet har til opgave at finde den mindste familie af mængder $C \subseteq F$ således at alle elementer i X er dækket. Dette kan formelt skrives:

$$\begin{aligned} \text{minimer} \quad & |C| \\ \text{hvor} \quad & C \subseteq F \\ & \bigcup_{S_i \in C} S_i = X \end{aligned}$$

Q 16: Hvad er det tilhørende afgørlighedsproblem SET-COVER-DECISION?

16A) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, F, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \geq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

16B) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, F, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \leq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

16C) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, C, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \geq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

16D) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, C, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \leq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

16E) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, C, F, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \geq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

16F) SET-COVER-DECISION $= \{ < X, C, F, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \leq k \text{ og } \cup_{S_i \in C} S_i = X \}$

■

Knudeoverdækningsproblemet i afgørlighedsversion er givet ved

VERTEX-COVER $= \{ < G, k >: \text{Grafen } G = (V, E) \text{ har en knudeoverdækning af størrelse } k \}$

Q 17: Vi vil vise at SET-COVER-DECISION er $\mathcal{NP}$-hårdt ved reduktion fra VERTEX-COVER. Hvilken af følgende reduktioner kan anvendes:

17A) Lad $X = V$ være mængden af knuder. Lad S_i for $i \in E$ indeholde kantens endepunkter.

17B) Lad $X = E$ være mængden af kanter. Lad S_i for $i \in V$ indeholde de kanter som er incidente med i.

17C) Lad $X = V$ være mængden af knuder. Lad S_i for $i \in V$ indeholde de kanter som *ikke* er incidente med i.

17D) Lad $X = E$ være mængden af kanter. Lad S_i for $i \in E$ indeholde alle knuder V *undtagen* kantens endepunkter.

■

I Cormen, Leiserson, Rivest, Stein “Introduction to algorithms” afsnit 35.3 (ikke del af pensum) vises det at SET-COVER kan approximeres med faktoren

$$\rho = H(\max_{S \in F} |S|)$$

hvor $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$ er det k’te harmoniske tal.

Q 18: (tekstopgave) Antag at grafen $G = (V, E)$ har den egenskab at alle knuder har grad højst 3 (dvs. højst 3 kanter er incidente med hver knude). Vis at VERTEX-COVER kan approximeres med faktoren $\rho = \frac{11}{6}$. ■

Kryptering

Q 19: (tekstopgave)

a) Find den multiplikativt inverse af 11 i gruppen $\mathbb{Z}^*_{32}$ ved brug af EXTENDED-EUCLID. Giv tilstrækkeligt med detaljer til at man kan følge beregningerne.

b) Bob sender en krypteret besked $C(M) = 10$ til Alice ved brug af RSA krypteringssystemet. Hertil benytter han Alices offentlige nøgle $(e, n) = (11, 51)$. Hvilken besked M sendte Bob? (Hint: 17 går op i 51)

■

Vejledende svar

S 1 Svarmulighed C: Ingen af ovenstående
■

S 2 Svarmulighed D: 5 ■

S 3 Svarmulighed D: ■

S 4 Svarmulighed B: ■

S 5 5: Idet b_1 og b_2 er negative, er den basale løsning ikke lovlig og INITIALIZE_SIMPLEX skal løse hjælpe LP L_{AUX}:

$$\begin{array}{ll} \text{maximer} & -x_0 \\ \text{hvor} & 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_0 \leq 8 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_0 \leq -5 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_0 \leq -1 \\ & x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Skrevet på "slack form":

$$\begin{array}{ll} & z = -x_0 \\ \text{hvor} & x_4 = 8 - 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_0 \\ & x_5 = -5 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_0 \\ & x_6 = -1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_0 \end{array}$$

x_0 skal ind i basis mens x_5 skal forlade basis idet b_2 er mindst blandt alle b-værdier. Pivotering giver:

$$\begin{array}{ll} & z = -5 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 \\ \text{hvor} & x_0 = 5 + x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 \\ & x_4 = 13 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 \\ & x_6 = 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \end{array}$$

Vi har nu en lovlig basisløsning til L_{AUX}. Efter nogle flere iterationer (mindst 1 idet nogle koefficienter i objektfunktionen er positive) fås en optimel basisløsning til L_{AUX}. Hvis dens objektværdi er negativ, så har det oprindelige problem L ingen lovlige løsninger. Hvis objektværdien er 0, så giver den endelige "slack form", hvor x_0 er fjernet, en lovlig basisløsning til L. ■

S 6 Svarmulighed C: $A = 3$ er eneste mulighed som tilfredsstiller demandet for v_1. Heraf følger at $B = 1$ ved at kigge på demandet på enten knude v_2 eller v_3. ■

S 7 Svarmulighed A: Kanten (v_3, v_4) er fyldt op og har vægten -1; derfor findes kanten (v_4, v_3) og har vægten 1 i G_x. Kanten (v_5, v_3) har ledig kapacitet og har derfor vægten -1 i G_x. ■

S 8 Svarmulighed D: Denne kreds har vægten $1 + (-1) + (-3) = -3$. De andre kredse findes enten ikke eller har ikke negativ vægt. ■

S 9 Svarmulighed B: Redidualgrafen har imellem $|E|$ og $2|E|$ kanter, hvor $|E|$ er antallet af kanter i G. ■

S 10 a) Følgende strømforøgende stier giver anledning til 4 iterationer:
$s \to 2 \to 1 \to t$
$s \to 1 \to 2 \to t$
$s \to 2 \to 1 \to t$
$s \to 1 \to t$

b) De første to iterationer af Edmonds-Karp benytter nødvendigvis al kapaciteten i kanterne $(s,1)$ og $(2,t)$, svarende til de korteste stier fra s til t via hhv 1 og 2. Stien $s \to 2 \to 1 \to t$ er den sidste og tredie iteration.

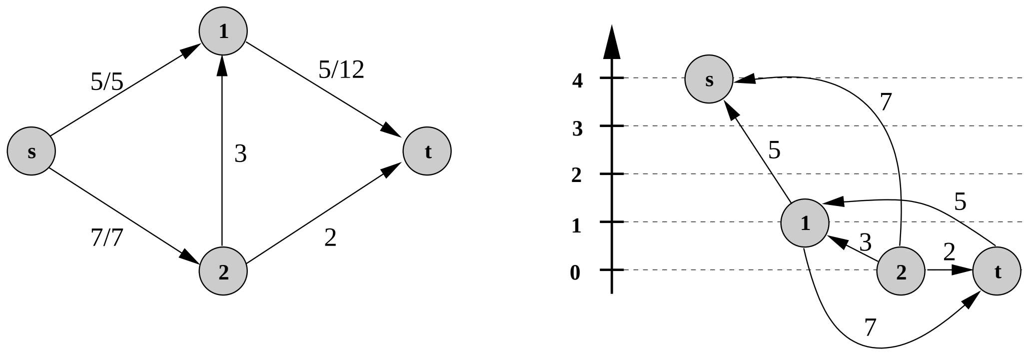
c) $S = \{s,2\}$, $T = \{1,t\}$ udgør et minimal snit med kapacitet 10.

d) Et gyldigt flow skal overholde kapacitet, skævsymmetri og flowbevarelse. Det viste preflow overholder ikke flowbevarelse, da knude 1 og knude 2 flyder over.

e) Knude 2 flyder over og $h[2] \leq h[u]$ for alle kanter $(2,u) \in E_f$. Derfor tillader knude 2 en relabel operation jvf. s. 673 i Cormen et al.

f) Knude 1 flyder over og $h[1] = h[t] + 1$. Derfor tillader kant $(1,t)$ en push operation jvf. s. 671 i Cormen et al.

g) Efter push operationen ser preflow og redidualnetværk således ud:



■

S 11 Svarmulighed E: Vi verificerer de foreslåede certifikater et ad gangen:

A) $x_1 = 1$
er ikke lovlig da projekt 1 kræver projekt 4.

B) $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 1$
er ikke lovlig da projekt 4 kræver projekt 7.

C) $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$
er lovlig, $\sum_{i \in V} p_i x_i = 3$, $\sum_{i \in V} r_i x_i = 7$.

D) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$
er ikke lovlig da projekt 3 kræver projekt 8.

E) $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 1$
er lovlig, $\sum_{i \in V} p_i x_i = 11$, $\sum_{i \in V} r_i x_i = 10$.

F) $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1$
er lovlig, $\sum_{i \in V} p_i x_i = 3$, $\sum_{i \in V} r_i x_i = 7$.

■

S 12 Svarmlighed F: Objektfunktionen bliver med $\lambda = 1$

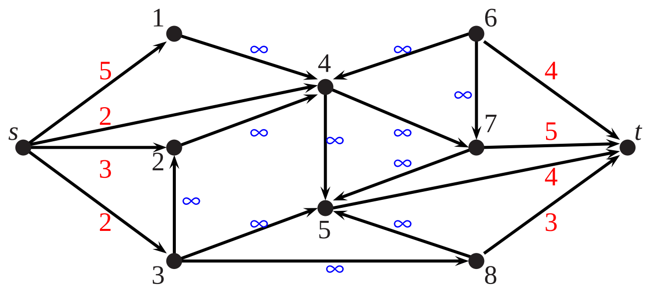
$$8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 1x_6 - 3x_7 - 2x_8 - 1 \cdot (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 - 10)$$

der kan reduceres til

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 4x_6 - 5x_7 - 3x_8 + 10$$

■

S 13 Svarmulighed A: Den rigtige transformation er



Med andre ord er

$$a_1 = 5; a_2 = 3; a_3 = 2; a_4 = 2; a_5 = 4; a_6 = 4; a_7 = 5; a_8 = 3$$

■

S 14 Svarmulighed C: Det minimale snit er $S = \{s, 1, 2, 4, 5, 7\}$ og $T = \{t, 3, 6, 8\}$. Kapaciteten af snittet er $c(S, T) = 11$. ■

S 15 Svarmulighed F: Fra projektopgave P2 ved vi at den optimale løsningsværdi z til UNCAPACITATED-PROJECT-SELECTION (UPS) er givet ved

$$z_{UPS} = \sum_{v \in V : q_v > 0} q_v - c(S, T) = 5 + 3 + 2 + 2 - 11 = 1$$

Løsningsværdien til RELAXED-PROJECT-SELECTION (RPS) er dermed givet ved

$$z_{RPS} = z_{UPS} + \lambda d = 1 + 1 \cdot 10 = 11$$

Hvilket også er en øvre grænseværdi $\mathcal{U} = 11$ for PROJECT-SELECTION. ■

S 16 Svarmulighed B: Den korrekte formulering af SET-COVER-DECISION er

$$\text{SET-COVER-DECISION} = \left\{ < X, F, k >: \text{ Der findes } C \subseteq F \text{ så } |C| \leq k, \cup_{S_i \in C} S_i = X \right\}$$

Da vi betragter et minimeringsproblem skal afgørlighedsproblemet afgøre om $|C| \leq k$. Endvidere er X, F, k input til afgørlighedsproblemet, mens C ikke er input. ■

S 17 Svarmulighed B: Den korrekte transformation er: Lad $X = E$ være mængde af kanter. Lad S_i for $i \in V$ indeholde de kanter som er incidente med i.

Hver mængde S_i vil da svare til de kanter som knude i dækker. En mængdeoverdækning $C \subset \{S_1, \ldots, S_V\}$ vil da netop svare til en knudeoverdækning. ■

S 18 Vi kan benytte transformationen fra VERTEX-COVER optimeringsproblemet til SET-COVER. Lad $X = E$ være mængde af kanter. Lad S_i for $i \in V$ indeholde de kanter som er incidente med i. Hvis vi ved at alle knuder har grad højst 3 vil der gælde at $|S_i| \leq 3$.

Approximationsalgoritmen for SET-COVER giver os en approximationsfaktor

$$\rho = H(\max |S_i|) \leq H(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Da obejektfunktionen for de to problemer er den samme, vil dette også være approximationsfaktoren for VERTEX-COVER. ■

S 19 a) Vi kører EXTENDED-EUCLID for $a = 32$ og $b = 11$.

a	b	$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$	d	x	y
32	11	2	1	-1	3
11	10	1	1	1	-1
10	1	10	1	0	1
1	0	-	1	1	0

Heraf aflæses at $a^{-1} = 3$ i gruppen $\mathbb{Z}_{32}^*$.

b) Vi faktoriserer $n = 51 = 3 \cdot 17 = p \cdot q$. Dermed ved vi at

$$\phi(n) = (p-1) \cdot (q-1) = 2 \cdot 16 = 32$$

Da $e = 11$ finder vi $d = 3$ da dette er den multiplikativit inverse af e i gruppen $\mathbb{Z}_{32}^*$ som bestemt ovenfor. Alices hemmelige nøgle er derfor $(d,n) = (3,51)$.

For at afkode beskeden udregner vi

$$M = C^e \bmod n = 10^3 \bmod 51 = 31$$

■