

Løsning af \mathcal{NP} -hårde problemer

- Løs til optimalitet i eksponentiel tid
- Find tilnærmet løsning i polynomiel tid

Oversigt

- Grænseværdier
- Branch-and-bound algoritmens komponenter
- Eksempler på branch-and-bound algoritmer
- Eksempler på grænseværdier
- Dominans af grænseværdi
- Kritiske og semikritiske knuder

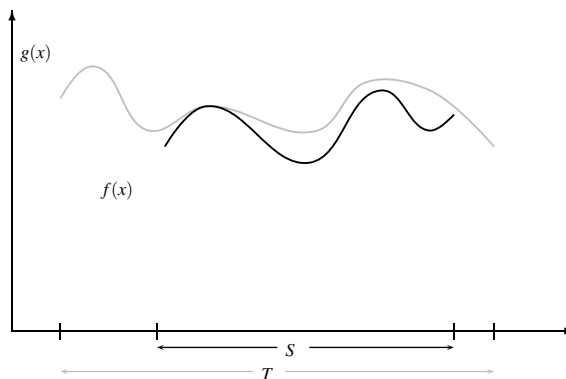
Selv om alle \mathcal{NP} -fuldstændige problemer kan reduceres til hinanden skal specifik struktur udnyttes i praksis

Grænseværdier

$$z = \max\{f(x) \mid x \in S\} \quad \text{f.x. } S \text{ delproblem}$$

- nedre grænseværdi $L \in \mathbb{R}: L \leq z$
- øvre grænseværdi $U \in \mathbb{R}: U \geq z$

For enhver løsning $x' \in S$ er $f(x')$ nedre grænseværdi



$$\text{Definition 1} \quad P : z = \max\{f(x) \mid x \in S\}$$

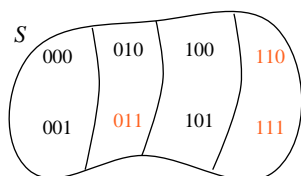
$$R : z_R = \max\{g(x) \mid x \in T\}$$

R er en relaxering af P hvis

- (i) $S \subseteq T$
- (ii) $g(x) \geq f(x)$ for alle $x \in S$

Grænseværdier

Hvis R er en relaxering af P så er z_R en øvre grænseværdi for S



Grænseværditest:

$$u(S_i) \leq L \quad \Rightarrow \quad x^* \notin S_i$$

hvor x^* optimal løsning med $f(x^*) > L$

Knapsack problem, øvre grænseværdi

Fraktionelle knapsack problem i Cormen

$$u_{kp}^1 = \max \left\{ \sum_{j=1}^n p_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, 0 \leq x_j \leq 1 \right\}$$

Køretid

$O(n)$ mediansøgning

Relaxering

Originale knapsack problem

$$f(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, x_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Fraktionelle knapsack problem

$$g(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, 0 \leq x_j \leq 1 \right\}$$

Kontrollerer betingelser

- (i) $S \subseteq T$
- (ii) $g(x) \geq f(x)$ for alle $x \in S$

Branch-and-bound

$$z = \max\{f(x) \mid x \in S\}$$

```

1   $\mathcal{L} := -\infty; L := \{S\}$ 
2  while  $L \neq \emptyset$ 
3    vælg et delproblem  $S_i$  fra  $L$ 
4     $L := L \setminus \{S_i\}$ 
5    if  $S_i \neq \emptyset$  then
6      find en øvre grænseværdi  $u(S_i)$ 
7      find en lovlig løsning  $x$  i  $S_i$ 
8      if  $u(S_i) > \mathcal{L}$  then (grænseværditest)
9        if  $f(x) > \mathcal{L}$  then  $\mathcal{L} := f(x); x^* := x$ 
10       opdel  $S_i$  i delproblemer  $S_i^1, \dots, S_i^k$ 
11       tilføj delproblemerne til  $L$ , dvs. sæt
            $L := L \cup \{S_i^1, \dots, S_i^k\}$ 
12     endif
13   endif
14 endwhile

```

- L liste af delproblemer S_i ofte organiseret prioritetskø
- Delproblemerne i L er *åbne delproblemer*
- Behandlede delproblemer er *lukkede delproblemer*
- global nedre grænseværdi \mathcal{L} , tilhørende løsning x^*

5

Branch-and-bound, fire komponenter

1. Øvre grænseværdifunktion

- lineær relaxering
- lagrange relaxering
- surrogat relaxering
- semidefinite relaxering

2. Nedre grænseværdi (hidtil bedst kendte løsning)

- i hver branch-and-bound knude, check om $|S_i| = 1$
- omform øvre grænseværdi til lovlig løsning
- heuristik for hvert delproblem
- god initial løsning inden branch-and-bound

3. Søgestrategi (rækkefølge af delproblemer)

- dybde-først søgning
- bedste-først søgning
- bredde-først søgning
- heuristisk styret søgning

4. Forgreningsregel (opdeling af løsningsrum)

- tilføj ekstra begrænsning (problem skal stadig kunne løses effektivt)
- opdeling i 2 eller flere delproblemer (ikke for mange)
- søgetræet bør vokse symmetrisk

6

Knapsack problem, nedre grænseværdi

Grådige algoritme

j	1	2	3	4	5	6	7
p_j	6	5	8	9	6	7	3
w_j	2	3	6	7	5	9	4

$c = 9, n = 7$

Øvre grænseværdi: genstande 1, 2 brøk af $b = 3$

$$u_{\text{kp}}^1 = 11 + 8 \frac{2}{3} = 16 \frac{1}{3},$$

kan rundes ned til $u_{\text{kp}}^1 = 16$

Nedre grænseværdi: genstande 1, 2, 7

$$\mathcal{L} = 14$$

7

Knapsack problem, branch-and-bound

j	1	2	3	4	5	6	7
p_j	6	5	8	9	6	7	3
w_j	2	3	6	7	5	9	4

$c = 9, n = 7$

Dybde-først søgning (stak lagrer åbne delproblemer L)
Heuristisk styret søgestrategi

BRANCHBOUNDKNAPSACK(\bar{p}, \bar{w}, i)

if $\bar{w} > c$ **then return**

if $\bar{p} > \mathcal{L}$ **then** $\mathcal{L} = \bar{p}; x^* := x$

if $i > n$ **then return**

Udregn u_{kp}^1 defineret på genstande $\{i, \dots, n\}$ og med kapacitet $c - \bar{w}$.

Øvre grænseværdi for det betragtede delproblem er $u = \bar{p} + \lfloor u_{\text{kp}}^1 \rfloor$.

if $u > \mathcal{L}$ **then**

$x_i := 1; \text{BRANCHBOUNDKNAPSACK}(\bar{p} + p_i, \bar{w} + w_i, i + 1)$

$x_i := 0; \text{BRANCHBOUNDKNAPSACK}(\bar{p}, \bar{w}, i + 1)$

endif

Hvor

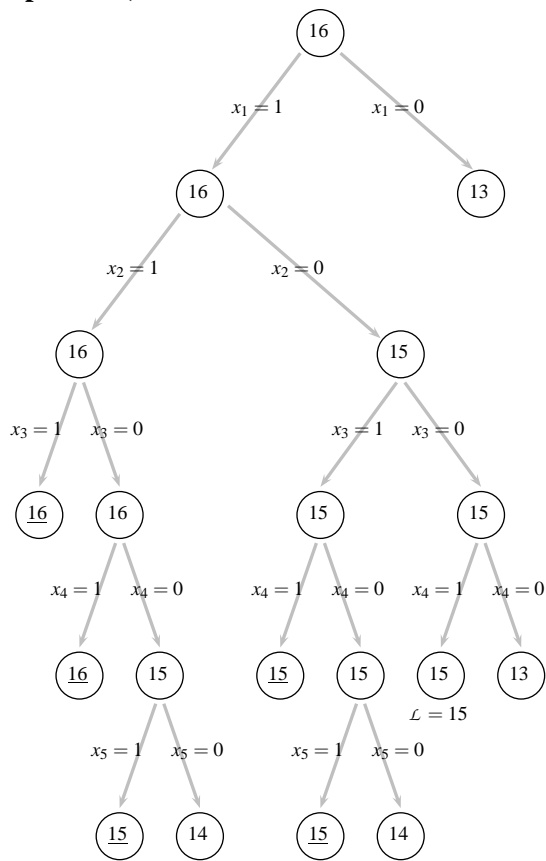
- i : næste genstand vi skal forgrene på
- \bar{p} : profitsummen af valgte genstande
- \bar{w} : vægtsummen af valgte genstande

init: $x = (0, 0, \dots, 0)$, $\mathcal{L} = 0$ (eller bedre)

kald: BRANCHBOUNDKNAPSACK(0, 0, 1)

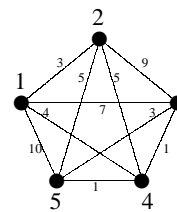
8

Knapsack problem, branch-and-bound



9

Dense subgraph problem



- komplet (orienteret) graf $G = (V, E, c)$, heltal k
- udvælg $U \subseteq V$ af størrelse $|U| = k$
- sum af kantvægte mellem knuder i U maksimeres

\mathcal{NP} -hårdt ved "reduktion" fra klike

$$z = \max \left\{ \sum_{i \in U} \sum_{j \in U} c_{ij} \mid U \subseteq V, |U| = k \right\}$$

Eksempel $G = (V, E, c), k = 3$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	7	4	10	5	7
2	3	0	9	5	5	10	6
3	7	9	0	1	3	2	4
4	4	5	1	0	1	9	1
5	10	5	3	1	0	3	2
6	5	10	2	9	3	0	3
7	7	6	4	1	2	3	0

Optimal løsning $U = \{2, 4, 6\}$, løsningsværdi 48

10

Dense subgraph problem, øvre grænseværdi

Sæt en parentes i objektfunktionen

$$z = \max \left\{ \sum_{i \in U} \left(\sum_{j \in U} c_{ij} \right) \mid U \subseteq V, |U| = k \right\}$$

Lad \bar{c}_i øvre grænse på kantvægt-sum fra knude i

$$\bar{c}_i = \max \left\{ \sum_{j \in U} c_{ij} \mid U \subseteq V, |U| = k \right\}$$

Grænseværdi

$$u_{\text{DSP}}^1 = \max \left\{ \sum_{i \in U} \bar{c}_i \mid U \subseteq V, |U| = k \right\}$$

Køretid

$V \cdot O(|V|)$ vælg k største kantvægte fra knude i
(Problem 9-1 side 194 i Cormen)

$O(|V|)$ vælg k største af $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$

Samlet: $O(|V|^2)$ tid

11

Dense subgraph problem, øvre grænseværdi

Relaksering

Originale problem

$$f(x) = \sum_{i \in U} \left(\sum_{j \in U} c_{ij} \right) \quad S = \{U \subseteq V, |U| = k\}$$

Nye problem

$$g(x) = \sum_{i \in U} \bar{c}_i \quad T = \{U \subseteq V, |U| = k\}$$

Kontrollerer betingelser

- $S \subseteq T$
- $g(x) \geq f(x)$ for alle $x \in S$

Eksempel $n = 7, k = 3$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	\bar{c}_i
1	0	3	7	4	10	5	7	24
2	3	0	9	5	5	10	6	25
3	7	9	0	1	3	2	4	20
4	4	5	1	0	1	9	1	18
5	10	5	3	1	0	3	2	18
6	5	10	2	9	3	0	3	24
7	7	6	4	1	2	3	0	17

Øvre grænseværdi $u_{\text{DSP}}^1 = 73$

12

Dense subgraph problem, branch-and-bound

Heuristisk styret søgestrategi

\bar{c}_i øvre grænseværdi for kantvægt-summen fra knude i

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	7	4	10	5	7
2	3	0	9	5	5	10	6
3	7	9	0	1	3	2	4
4	4	5	1	0	1	9	1
5	10	5	3	1	0	3	2
6	5	10	2	9	3	0	3
7	7	6	4	1	2	3	0

$V_3 \notin U$

$V_3 \in U$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	7	4	10	5	7
2	3	0	9	5	5	10	6
3	7	9	0	1	3	2	4
4	4	5	1	0	1	9	1
5	10	5	3	1	0	3	2
6	5	10	2	9	3	0	3
7	7	6	4	1	2	3	0

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	7	4	10	5	7
2	3	0	9	5	5	10	6
3	7	9	0	1	3	2	4
4	4	5	1	0	1	9	1
5	10	5	3	1	0	3	2
6	5	10	2	9	3	0	3
7	7	6	4	1	2	3	0

- Knude i forbydes: slet tilhørende række og søjle
- Knude i vælges: slet den tilhørende række og søjle modifier (c_{ij})

$$c_{jj} := c_{jj} + c_{ij} + c_{ji}$$

for hvert $j = 1, \dots, n$ hvor $j \neq i$

13

Traveling salesman problem

Symmetrisk traveling salesman problem

- vægtet graf (V, E, d) , hvor d_{ij} afstand
- symmetriske afstande $d_{ij} = d_{ji}$
- find minimal længde Hamilton-kreds H

$$z = \min \left\{ \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} \mid H \subseteq E, H \text{ er en Hamilton-kreds} \right\}$$

Otte byer på Bornholm



14

Traveling salesman problem, eksempel

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	11	24	25	30	29	15	15
2	11	0	13	20	32	37	17	17
3	24	13	0	16	30	39	29	22
4	25	20	16	0	15	23	18	12
5	30	32	30	15	0	9	23	15
6	29	37	39	23	9	0	14	21
7	15	17	29	18	23	14	0	7
8	15	17	22	12	15	21	7	0

Optimal løsning:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 1$
- længde af Hamilton-kreds $z = 100$

15

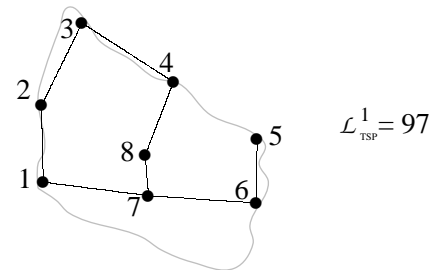
Traveling salesman problem, nedre grænseværdi

Vægtet graf (V, E, d)

- **1-træ**: udspændende træ på knuderne $2, 3, \dots, n$ knude 1 forbindes med to vilkårlige kanter
- **minimalt 1-træ**: mindste udspændende træ på knuderne $2, 3, \dots, n$ knude 1 forbindes med billigste kanter

Bevis: uafhængige delproblemer optimeres hver for sig

Eksempel 1-træ relaxering



Køretid

- $O(|E| \log |V|)$ MST Kruskal
- $O(|E| + |V| \log |V|)$ MST Prim, Fibonacci hobe
- $O(|V|)$ to billigste kanter fra 1

Samlet: $O(|E| + |V| \log |V|)$

16

Traveling salesman problem, nedre grænseværdi

$$\mathcal{L}_{\text{TSP}}^1 = \min \left\{ \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} \mid H \subseteq E, H \text{ er et 1-træ} \right\}$$

Relaksering

Originale problem

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} \quad S = \{H \subseteq E \mid H \text{ er en Hamilton-kreds}\}$$

Nye problem

$$g(x) = \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} \quad T = \{H \subseteq E \mid H \text{ er et 1-træ}\}$$

Kontrollerer betingelser (minimeringsproblem)

- (i) $S \subseteq T$
- (ii) $g(x) \leq f(x)$ for alle $x \in S$

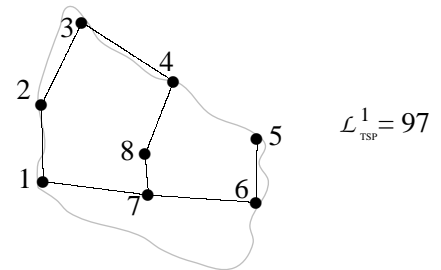
17

Traveling salesman problem, forgreningsstrategi

Metode 1

- Vælg en kant fra knude 1
- Vælg næste kant
- ...

Ikke god

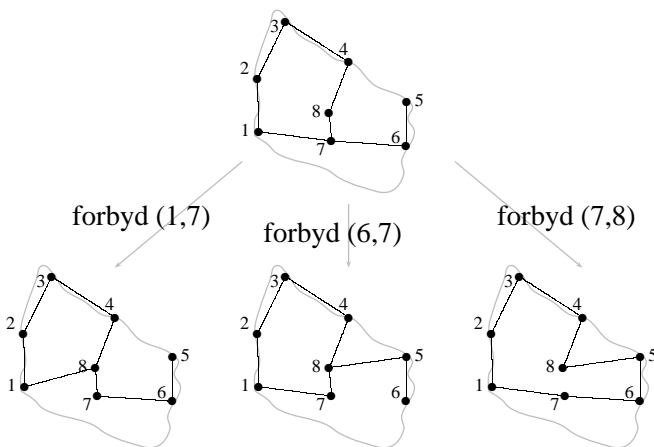


Metode 2:

- Udgangspunkt i 1-træ
- Hvis alle knuder har valens 2, har vi Hamilton-kreds (og kan bortskære delproblem)
- Ellers vælg en knude med valens større end 2
- Forbyd på skift de kanter, som udgår fra knuden

18

Traveling salesman problem, forgreningsstrategi



Knude 7 har valens 3

- Forbyd (1,7) prisen af 1-træet $\mathcal{L} = 97$
- Forbyd (6,7) prisen af 1-træet $\mathcal{L} = 98$
- Forbyd (7,8) 1-træet giver $\mathcal{L} = \mathcal{U} = 105$

19

Kvalitet af grænseværdifunktionen

maksimeringsproblem

$$z = \max \{f(x) \mid x \in S\}$$

to øvre grænseværdifunktioner \mathcal{U}_1 og \mathcal{U}_2

Definition 2 grænseværdifunktion \mathcal{U}_1 dominerer grænseværdifunktion \mathcal{U}_2 hvis

- $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2$ for alle instanser
- $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$ for mindst en instans

NB: kræver ikke at \mathcal{U}_1 altid er bedre end \mathcal{U}_2

20

Dominans af grænseværdier, knapsack problem

$$u_{\text{KP}}^0 = \max \left\{ \sum_{j=1}^n p_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, x_j \geq 0 \right\}$$

Relaksering

Originale knapsack problem

$$f(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, x_j \in \{0, 1\} \right\}$$

nye knapsack problem

$$g(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, 0 \leq x_j \right\}$$

Kontrollerer betingelser

(i) $S \subseteq T$

(ii) $g(x) \geq f(x)$ for alle $x \in S$

Køretid

Hvis sorteret profit-vægt forhold, udregnes $O(1)$ tid

$$u_{\text{KP}}^0 = \frac{c \cdot p_1}{w_1}$$

21

Dominans

- $u_{\text{KP}}^1 \leq u_{\text{KP}}^0$ for alle instanser

To relakseringer har samme objektfunktion

$$u_{\text{KP}}^1 : T' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, 0 \leq x_j \leq 1 \right\}$$

$$u_{\text{KP}}^0 : T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, 0 \leq x_j \right\}$$

Da $T' \subseteq T$ er

$$\max_{x \in T'} f(x) \leq \max_{x \in T} f(x)$$

- $u_{\text{KP}}^1 < u_{\text{KP}}^0$ for en instanser

eksemplet: $u_{\text{KP}}^0 = 27$ mens $u_{\text{KP}}^1 = 16\frac{1}{3}$

22

Dominans af grænseværdier, traveling salesman

Strammere grænseværdi ved at omformulere afstandsmatricen (d_{ij})

- længden af en Hamilton-kreds er uændret
- 1-træ relakseringen returnerer strammere grænseværdi

Vi "straffer" 1-træer som ikke er en Hamilton-kreds

Omformuler afstandsmatrix

- "straf" knuder med valens større end 2
- "beløn" knuder med valens mindre end 2

$$d'_{ij} = d_{ij} + (v_i - 2) + (v_j - 2)$$

- ny grænseværdi ved mindste 1-træ for (d'_{ij})

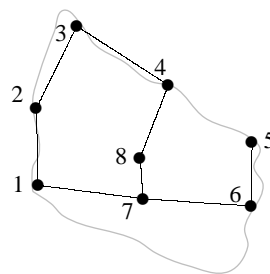
$$\mathcal{L}_{\text{TSP}}^2 = \min \left\{ \sum_{(i,j) \in H} d'_{ij} \mid H \subseteq E, H \text{ er et 1-træ} \right\}$$

23

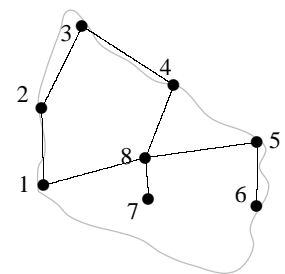
Dominans af grænseværdier, traveling salesman

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	11	24	25	30	29	15	15
2	11	0	13	20	32	37	17	17
3	24	13	0	16	30	39	29	22
4	25	20	16	0	15	23	18	12
5	30	32	30	15	0	9	23	15
6	29	37	39	23	9	0	14	21
7	15	17	29	18	23	14	0	7
8	15	17	22	12	15	21	7	0

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	11	24	25	29	29	16	15
2	11	0	13	20	31	37	18	17
3	24	13	0	16	29	39	30	22
4	25	20	16	0	14	23	19	12
5	29	31	29	14	0	8	23	14
6	29	37	39	23	8	0	15	21
7	16	18	30	19	23	15	0	8
8	15	17	22	12	14	21	8	0



$$\mathcal{L}_{\text{TSP}}^1 = 97$$



$$\mathcal{L}_{\text{TSP}}^2 = 97$$

Man kan gentage iterationsprocessen et antal gange
Efterfølgende iterationer $\mathcal{L}_{\text{TSP}}^2 = 98, 99, 99, 100$

24

Relaksering

Originale problem

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in H} d_{ij}$$

$$S = \left\{ H \subseteq E \mid H \text{ er en Hamilton-kreds} \right\}$$

Nye problem

$$g(x) = \sum_{(i,j) \in H} d'_{ij}$$

$$T = \left\{ H \subseteq E \mid H \text{ er et 1-træ} \right\}$$

Kontrollerer betingelser (minimeringsproblem)

(i) $S \subseteq T$

(ii) $g(x) \leq f(x)$ for alle $x \in S$

For enhver Hamilton-kreds H gælder

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{(i,j) \in H} (d_{ij} + (v_i - 2) + (v_j - 2)) \\
&= \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} + \sum_{(i,j) \in H} (v_i - 2) + \sum_{(i,j) \in H} (v_j - 2) \\
&= \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} + 2 \left(\sum_{i \in V} v_i - 2|V| \right) = \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} = f(x)
\end{aligned}$$

25

Dominans

$$\mathcal{L}_{TSP}^3 = \max_{i=1, \dots, k} \mathcal{L}_{TSP}^{2(i)}$$

bedste grænseværdi med k iterationer

\mathcal{L}_{TSP}^3 dominerer \mathcal{L}_{TSP}^1 da

- $\mathcal{L}_{TSP}^3 \geq \mathcal{L}_{TSP}^2$ for alle instanser

første iteration foregår med originale afstandsmatrix

- $\mathcal{L}_{TSP}^3 > \mathcal{L}_{TSP}^2$ for en instanser

eksemplet

26

Kritiske og Semikritiske delproblemer

optimeringsproblem

$$z = \max\{f(x) \mid x \in S\}$$

forgreningsregel som opdeler S i S_1, \dots, S_m
øvre grænseværdi-funktion $u(S_i)$

Definition 3 Et delproblem S_i er kritisk \Leftrightarrow

$$u(S_i) > z$$

alle kritiske delproblemer skal behandles

Definition 4 Et delproblem S_i er semikritisk \Leftrightarrow

$$u(S_i) \geq z$$

Sætning 1 Hvis z er kendt fra starten, vil enhver branch-and-bound algoritme kun gennemløbe de kritiske delproblemer (svarende til den valgte forgreningsregel og grænseværdi-funktion).

27

Kritiske og Semikritiske delproblemer

Sætning 2 Uanset den initiale nedre grænseværdi vil bedste-først søgestrategien kun behandle de semikritiske delproblemer

Indirekte bevis

- Antag bedste-først behandler S_i hvor $u(S_i) < z$
- $z < z$ på givne tidspunkt
- Bedste-først søgning: så for alle $S_j \in L$

$$u(S_i) \geq u(S_j)$$

- for alle $S_j \in L$

$$u(S_j) \leq u(S_i) < z$$

- z kan ikke findes i nogen af deløsningsrummene

Dvs: Bedste-først søgning sikrer at z bliver fundet inden man betragter delproblemer S_i med $u(S_i) < z$.

28