Videregående Algoritmik, DIKU 2007-08
Tirsdag 18. december
David Pisinger

Approximations-algoritmer

- Motivation
- Definitioner
- Approximations-algoritme for knudeoverdækning
- Approximations-algoritme for TSP (trekantsulighed)
- Negativt resultat om generel TSP
- Fuldt polynomiel-tids approximations skema (FPTAS) for SUBSET-SUM

Løsningsmetoder for $\mathcal{NP}$-hårde opt.problemer

Opdelingskriterier

- løsningskvalitet: optimal/ikke-optimal
- beregningstid: polynomiel/ikke-polynomiel

Ikke-optimale metoder:

- løsningskvalitet:
  - ingen garanti kan gives
  - garanti kan gives, men det kan ikke gøres vilkårligt godt
  - garanti kan gives, og det kan gøres vilkårligt godt
- beregningstid:
  - ingen garanti kan gives
  - polynomiel i inddata
  - polynomiel i inddata og præcision

Eksempel: knapsack problem

Heuristik for Knapsack Problemet

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- sorter efter aftagende effektivitet p_j/w_j
- fyld grådigt $1, 2, \ldots$ så længe plads

Vilkårligt dårlig løsning:

$$\begin{aligned} & p_1 = 1, w_1 = 1 \\ & p_2 = M, w_2 = M+1 \\ & c = M+1 \end{aligned}$$

Vi har:

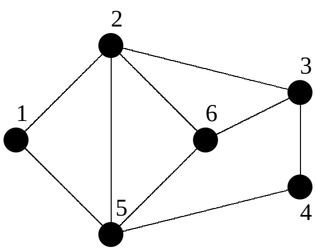
- heuristisk løsning: $C = 1$
- optimal løsning: $C^* = M$
- forhold:
$$\frac{C^*}{C} = M$$

Eksempel: knudeoverdækning

En knudeoverdækning af en ikke orienteret graf $G = (V, E)$ er en delmængde af $V' \subseteq V$ så

$$(u,v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ eller } v \in V' \text{ (eller begge)}$$

Størrelsen af en knudeoverdækning er $|V'|$.
Find den mindste overdækning i grafen.



Approximations algoritme:

- Vælg tilfældig kant $(u, v) \in E$.
- Lad $V' \leftarrow V' \cup \{u\} \cup \{v\}$
- Fjern kanter fra E som er incidente med u eller v

Approximations algoritmen finder en knudeoverdækning V' af størrelse C som højst er dobbelt så stor som den optimale knudeoverdækning V^* af størrelse C^*.

Approximations-algoritmer

Ikke-eksakte løsningsmetoder, der giver garanti for hvor tæt på optimum man kommer.

- C — algoritmens løsningsværdi
- C^* — problemets optimale løsningsværdi

Minimeringsproblem $(C \geq C^*)$

Mål: gør $\frac{C}{C^*}$ så lille som muligt

Maximeringsproblem $(C \leq C^*)$

Mål: gør $\frac{C^*}{C}$ så lille som muligt

Generelt krav

Gør

$$\max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right)$$

så lille som mulig.

$$\max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right) \leq \rho(n)$$

hvor $\rho(n)$ er "ratio bound". Bemærk $\rho(n) \geq 1$

Approximations-algoritmer

Man kan også måle relativ fejl

$$\frac{|C - C^*|}{C^*} \leq \varepsilon(n)$$

Minimering

$$\frac{|C - C^*|}{C^*} = \frac{C}{C^*} - 1$$

så

$$\frac{C}{C^*} \leq \rho(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{C^*} - 1 \leq \rho(n) - 1$$

Altså: $\varepsilon(n) = \rho(n) - 1$

Maximering

$$\frac{|C - C^*|}{C^*} = 1 - \frac{C}{C^*}$$

så

$$\frac{C^*}{C} \leq \rho(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{C^*} \geq \frac{1}{\rho(n)} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{C}{C^*} \leq 1 - \frac{1}{\rho(n)} = \frac{\rho(n) - 1}{\rho(n)}$$

Altså: $\varepsilon(n) = \frac{\rho(n)-1}{\rho(n)}$ (dermed: $\varepsilon(n) \leq \rho(n) - 1$)

Approximations-algoritmer

approximations skema (smuk)

- Input: instans, $\varepsilon > 0$
- Algoritme træffer valg på basis af n og ε
- Output: Løsning med relativ fejl mindre end ε

Skema $\rightarrow$ idet familie af algoritmer

polynomiel-tids approx. skema (smukkere)

- Approximations skema
- Algoritme kører i polynomiel tid i størrelsen af n

køretid f.eks. $2^{1/\varepsilon} n^3$

fuldt polynomiel-tids approx. skema (smukkest)

- Approximations skema
- Algoritmen kører i polynomiel tid målt i n og $1/\varepsilon$

køretid f.eks. $(1/\varepsilon)^2 n^3$
(findes ej for stærkt $\mathcal{NP}$-hårde problemer)

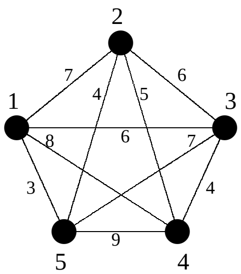
Betegnelser

- **A** Approximations-algoritme
- **PTA** Polynoimel-Tids Approximations-algoritme
- **AS** Approximations Skema
- **PTAS** Polynomiel-Tids Approximations Skema
- **FPTAS** Fuldt Polynomiel-Tids Approximations Skema

- **Heuristik** Ingen garanti for løsningskvalitet

Traveling Salesman Problem

Givet graf $G = (V, E)$, omkostning $c(u, v)$ for hvert kant $(u, v) \in E$. Find billigste Hamilton-kreds.



Trekantsulighed: $u, v, w \in V$

$$c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$$

(bemærk: komplet graf)

- Overholdt: geometriske problemer
- Ej overholdt: flypriser

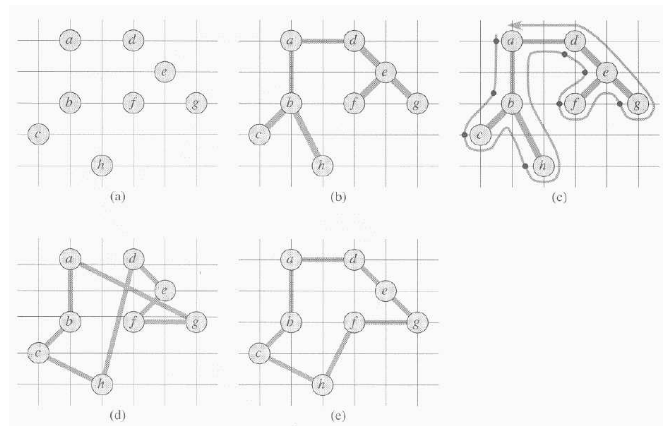
Definition: pris af kantemængde $A \subseteq E$

$$c(A) = \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)$$

Approx. algoritme for TSP (trekantsulighed)

APPROX-TSP-TOUR(G, c)
1 select a vertex $r \in V[G]$ to be a "root" vertex
2 grow a minimum spanning tree T for G from root r using MST-PRIM(G, c, r)
3 let L be the list of vertices visited in a preorder tree walk of T
4 return the Hamiltonian cycle H that visits the vertices in the order L

Eksempel



Sætning

APPROX-TSP-TOUR er en approximations algoritme med "ratio-bound" $\rho = 2$ for TSP opfyldende trekantsulighed. Dvs:

$$\frac{c(H)}{c(H^*)} \leq 2$$

Bevis

Mindste udspændende træ: T

$$c(T) \leq c(H^*)$$

"full walk" i grafen, besøger hver kant to gange

$$c(W) = 2c(T)$$

"walk" W ej Hamilton kreds $\rightarrow$ sletter knuder. Trekantsulighed sikrer

$$c(H) \leq c(W)$$

Totalt:

$$c(H) \leq c(W) = 2c(T) \leq 2c(H^*)$$

Approx. algoritme for TSP (generel)

Hvis $\mathcal{NP} \neq \mathcal{P}$ findes der ingen polynomieltids approximationsalgoritme for generelt TSP med "ratio bound" ρ

Bevis

Antag at fandtes polynomiel approximations algoritme A med "ratio bound" $\rho \geq 1$. Dvs finder tur C med

$$\frac{C}{C^*} \leq \rho$$

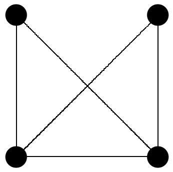
Vil vise at HAM-CYCLE kan løses i polynomiel tid $\Rightarrow$ $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$

Givet instans af HAM-CYCLE defineret på $G = (V, E)$.

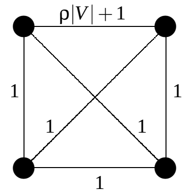
- Komplet graf: $G' = (V, E')$ hvor
$$E' = \{(u,v) : u, v \in V \text{ og } u \neq v\}$$
- Tildel kantvægte
$$c(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } (u,v) \in E \\ \rho|V| + 1 & \text{if } (u,v) \notin E \end{cases}$$

Løs TSP for (G', c).

Approx. algoritme for TSP (generel)



HAM-CYCLE



TSP

Afgør problem

- Hvis $C \leq \rho|V|$ så findes der en Hamilton kreds
- Hvis $C > \rho|V|$ så findes der ikke en Hamilton kreds

Vi har

- Hvis der findes en Hamilton kreds i G har TSP problemet optimal løsning $C^* = |V|$.
- Hvis der ikke findes en Hamilton kreds i G vil TSP problemet vælge mindst en "dyr" kant $c(u,v) = \rho|V| + 1$ så $C^* > \rho|V| + 1$
- Approximations algoritme A finder en løsning med pris C opfyldende

$$C \leq \rho C^*$$

Subset-sum Problem

Subset-sum problem (delmængde sum):

- Givet mængde af heltal $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ samt t
- Find en delmængde $S' \subseteq S$ så

$$\sum_{j \in S'} x_j \leq t$$

er størst mulig

For eksempel

$$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1093, 1284, 1344\}$$
$$t = 3754$$

har løsning $S' = \{1, 16, 64, 256, 1040, 1093, 1284\}$.

Viser: Fuldt polynomiel-tids approximations skema

Eksponentiel algoritme

Dynamisk programmering-lignende algoritme.
Lister over tal som kan opnås med en delmængde af S

- Liste L af positive heltal, f.eks. $L =< 1, 2, 3, 5, 9 >$
- x positivt heltal, f.eks. $x = 2$
- $L + x =< 3, 4, 5, 7, 11 >$

Lad

$$P_i = \left\{\text{tal, der kan opnås som sum af } \{x_1, \ldots, x_i\}\right\}.$$

så gælder rekursionsligningen

$$P_i = P_{i-1} \cup (P_{i-1} + x_i)$$

Her kan foreningsmængden $L_1 \cup L_2$ udregnes i lineær tid da begge lister er sorterede i voksende orden (MERGE-LISTS).

Eksempel

Lad $S = \{4, 5, 7\}$, $t = 14$

$$P_0 = \{0\}$$
$$P_1 = \{0, 4\}$$
$$P_2 = \{0, 4, 5, 9\}$$
$$P_3 = \{0, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 16\}$$

Eksponentiel algoritme

Algoritme

```
EXACT-SUBSET-SUM(S, t)
n ← |S|
L_0 ← ⟨0⟩
for i ← 1 to n do
    L_i ← MERGE-LISTS(L_{i−1}, L_{i−1} + x_i)
    remove from L_i every element that is greater than t
return the largest element in L_n
```

Total køretid: nt.

Eksponentiel i input størrelsen $n \log t$.
F.eks: $t = 2^n$, køretid $n2^n = O(2^n)$, input n^2.

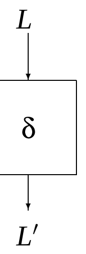
Idé til forbedring

- fjern elementer i P_i som ligger "tæt" på hinanden
- behold det mindste af to tal tæt på hinanden

TRIM liste L

Trimning

trim parameter δ med $0 < \delta < 1$



- Fjern så mange elementer tæt på hinanden som muligt
- For ethvert fjernet element $y \in L$ eksisterer $z \in L'$ med

$$z \le y \le (1+\delta)z$$

$$\left(\frac{y}{1+\delta} \le z \qquad \frac{y}{z} \le (1+\delta) \right)$$

Eksempel: $\delta = 0.1$

$$L = < 10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 29 >$$
$$L' = < 10, 12, 15, 20, 23, 29 >$$

Trimning

Algoritme:

```
TRIM(L, δ)
m ← |L|
L′ ← ⟨y_1⟩
last ← y_1
for i ← 2 to m do
    if y_i > last · (1 + δ) then
        append y_i onto the end of L′
        last ← y_i
return L′
```

Køretid: lineær.

Approximations algoritme

Givet instans (S, t), tilladt fejl ε.

- vælg trimningsfaktor $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$

```
APPROX-SUBSET-SUM(S, t, ε)
1  n ← |S|
2  L_0 ← ⟨0⟩
3  for i ← 1 to n do
4      L_i ← MERGE-LISTS(L_{i−1}, L_{i−1} + x_i)
5      L_i ← TRIM(L_i, ε/2n)
6      remove from L_i every element that is greater than t
7  return z^A given by the largest element in L_n
```

(Bogen kalder returnerede værdi z^*, hvilket ikke harmonerer med at z^* angiver optimal løsning)

Sætning

Fuldt polynomiel-tids approximations skema

1. Finder en lovlig løsning z^A
2. Relative fejl er mindre end ε

$$\frac{|z^* - z^A|}{z^*} \le \varepsilon$$

3. Algoritmen kører i polynomiel tid i n og $1/\varepsilon$

Vi kan antage $\varepsilon < 1$, da 2-approximation nem (overvej!)

Eksempel

Instans: $S = \{104, 102, 201, 101\}$, $t = 308$, $\varepsilon = 0.40$
Vælger $\delta = \varepsilon/2n = 0.40/8 = 0.05$.

Forløb:

line 2: $L_0 = \langle 0 \rangle$

line 4: $L_1 = \langle 0, 104 \rangle$
line 5: $L_1 = \langle 0, 104 \rangle$
line 6: $L_1 = \langle 0, 104 \rangle$

line 4: $L_2 = \langle 0, 102, 104, 206 \rangle$
line 5: $L_2 = \langle 0, 102, 206 \rangle$
line 6: $L_2 = \langle 0, 102, 206 \rangle$

line 4: $L_3 = \langle 0, 102, 201, 206, 303, 407 \rangle$
line 5: $L_3 = \langle 0, 102, 201, 303, 407 \rangle$
line 6: $L_3 = \langle 0, 102, 201, 303 \rangle$

line 4: $L_4 = \langle 0, 101, 102, 201, 203, 302, 303, 404 \rangle$
line 5: $L_4 = \langle 0, 101, 201, 302, 404 \rangle$
line 6: $L_4 = \langle 0, 101, 201, 302 \rangle$

Approximativ løsning: $z^A = 302$
Optimal løsning: $z^* = 307$, (faktisk afvigelse 2%)

Finder en lovlig løsning

- Kun lovlige summer i L, alle $\leq t$
- Naturligvis lovlig sum i sidste iteration

Relativ fejl mindre end ε

For ethvert fjernet element $y \in P$ eksisterer $z \in L$ så

$$\frac{y}{1+\delta} \leq z \leq y$$

Ved induktion i i kan det vises at efter i iterationer gælder: For ethvert fjernet element $y \in P_i$ eksisterer $z \in L_i$ så

$$\frac{y}{(1+\delta)^i} \leq z \leq y$$

Gælder specielt for $z^* \in P_n$, dvs. der findes $z \in L_n$ så

$$\frac{z^*}{(1+\delta)^n} \leq z \leq z^*$$

Må også gælde for z^A som er den største værdi i L_n så

$$\frac{z^*}{(1+\delta)^n} \leq z^A$$

eller

$$\frac{z^*}{z^A} \leq (1+\delta)^n$$

Vil vise at $(1+\delta)^n \leq 1+\varepsilon$ når $\delta = \varepsilon/2n$

Relativ fejl mindre end ε

Betragter $f(n,\varepsilon) = (1+\frac{\varepsilon}{2n})^n$.

Formel (3.13) side 53 siger at

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

og da $\frac{d}{dn}f(n,\varepsilon) > 0$ er f voksende.

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \leq e^{\varepsilon/2}$$

Formel (3.12) side 53 siger $e^x \leq 1+x+x^2$ for $|x| < 1$ så

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \leq 1+\varepsilon/2+(\varepsilon/2)^2$$

og da $\varepsilon < 1$ er $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$, så

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \leq 1+\varepsilon$$

Kombineret med formlen forrige side fås

$$\frac{z^*}{z^A} \leq 1+\varepsilon$$

og dermed

$$\frac{|z^*-z^A|}{z^*} = 1-\frac{z^A}{z^*} \leq 1-\frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon-1}{1+\varepsilon} \leq \varepsilon$$

Kører i polynomiel tid i n og $1/\varepsilon$

TRIM sletter et element $z \geq z'$ hvis

$$\frac{z}{z'} \leq (1+\delta)$$

Så på ethvert tidspunkt vil elementerne i L_i overholde

$$z > (1+\delta)z' = \alpha z' \qquad \alpha = (1+\delta) \text{ afstands-faktor}$$

Den tættest mulige liste ser ud som

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^k \approx t$$

Antal elementer er $k+2$, hvor k findes som:

$$\alpha^k = t \quad \Leftrightarrow \quad k\ln\alpha = \ln t \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\ln t}{\ln\alpha} = \frac{\ln t}{\ln(1+\delta)}$$

Formel (3.16) side 54 siger at for $\delta > -1$ gælder

$$\frac{\delta}{1+\delta} \leq \ln(1+\delta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(1+\delta)} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$$

så

$$k \leq \frac{(1+\delta)\ln t}{\delta} = \frac{(1+\varepsilon/2n)\ln t}{\varepsilon/2n}$$

Da $\varepsilon < 1$ gælder at $(1+\varepsilon/2n) \leq 2$ så

$$k \leq \frac{4n\ln t}{\varepsilon}$$

Køretid: $O(n(k+2)) = O(\frac{1}{\varepsilon}n^2\ln t)$

Indsigt

Approximabilitet og reduktion af problemer

- Da SUBSET-SUM er $\mathcal{NP}$-fuldstændigt gælder f.eks.

  $$\text{TSP} \leq_p \text{SUBSET-SUM}$$

- Vi kan approximere SUBSET-SUM vilkårligt godt i polynomiel tid
- Gælder tilsvarende resultat for TSP?

Reduktion gælder kun for afgørlighedsproblemer
Såfremt vi vil løse SUBSET-SUM-DECISION skal $\varepsilon = 0$

Branch-and-bound som Approximations Skema

Minimeringsproblem: (givet $\varepsilon > 0$)

- For ethvert underproblem (knude) lad ℓ være en nedre grænseværdi
- Lad z være hidtil bedste løsning
- Forkast underproblem hvis $\ell(1+\varepsilon) \geq z$
- Eksempel: $\varepsilon = 0.1$, $\ell = 11$, $z = 12$. Forkast knude

Approximations skema. Relativ afvigelse $< \varepsilon$.
Køretid: ???

Branch-and-bound i Polynomiel tid

Undersøg kun et polynomielt antal knuder $M = n^k$

- Best-first søgning
- Stop efter M knuder

Køretid polynomiel.
Løsningskvalitet: ???