Projektopgave VA-P2

Opgaven er stillet af: Jakob Krarup
Udleveringsdato: 2. december 2004
Afleveringsfrist: 9. december 2004 kl. 12.00

Generelt

Dette er den anden af kursets fire projektopgaver. Vilkårene mht. gruppestørrelse og aflevering af besvarelsen er aldeles som for VA-P1.

I flere spørgsmål/delopgaver ønskes et LP-problem løst. Medmindre en specifik løsningsmetode er krævet, er man frit stillet ved valg af denne.

Omfattende mellemregninger kan udelades i besvarelsen.

"VIRK"

Cormen *et al.* [CLRS] skriver i kap. 29 bl.a.: *"The real power of linear programming [LP] comes from the ability to solve new problems."*. Endvidere hedder det: *"Books abound with such real-world problems that linear programming can solve."*.

Så sandt som sagt, men - bortset fra det indledende eksempel om "electoral politics" - falder det klart udenfor formålet med [CLRS, Ch. 29] at redegøre nærmere for dette.

LP har i årtier været et anerkendt rutineværktøj til løsning af allehånde beslutningsproblemer. Blandt anvendelsesområderne er *produktionsplanlægning*, der også er yndlingsemne for flertallet af lærebogs- og eksamensopgaveforfattere. En typisk *product mix* LP-model er følgende:

$$\textbf{LP-1:}\quad \max\quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{rrll}
x_1 & & \leq 4 & \text{(K1)} \\
 & 2x_2 & \leq 12 & \text{(K2)} \\
3x_1 + & 2x_2 & \leq 18 & \text{(K3)} \\
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Virksomheden *VIRK* har i sit produktsortiment to produkter P1 og P2, der fremstilles pr. dag i ganske små mængder. x_1 og x_2 er de ukendte, ikke-negative antal enheder, der dagligt skal produceres af hhv. P1 og P2, og koefficienterne "3" og "5" i objektfunktionen er de tilsvarende profitter pr. enhed. (K1)-(K3) er udtryk for produktionsapparatets ressourceforbrug og kapacitetsbegrænsninger. Fx. betyder "$3x_1$" i uligheden (K3) at der til fremstilling af 1 stk. P1 medgår 3 enheder af den tredie ressource, og i alt er der "18" enheder af denne ressource til rådighed, ligeledes pr. dag.

Som det fremgår af **LP-1** ønsker *VIRK* at maximere profitten pr. dag under overholdelse af de givne begrænsninger.

....

S1: Løs LP-1 grafisk. Lad x_1^o, x_2^o, z^o være værdierne af x_1, x_2 og z i optimum. Angiv disse værdier.

....

Selv for probleminstanser af beskeden størrelse er håndkøring af simplex algoritmen ikke særligt morsomt. En anden lærebogsforfatter siger herom:

> *"The computations are tedious and voluminous, which makes the computer an essential tool for solving LPs. You are encouraged to experience hand computations at least once to gain an appreciation of how the method works. Following this experience, you probably will never need to use hand calculations again.".*

Det skal imidlertid prøves mindst een gang. Så derfor,

....

S2: Løs LP-1 med simplex algoritmen. Vis den optimale løsning i enten slack form eller tableau form.

....

[CLRS] lægger i sin fremstilling kun vægt på at finde en optimal løsning. Ofte er det dog langt mere interessant i praksis at se, hvad der sker med denne, hvis forudsætningerne ændres. Vi taler generelt om *post-optimal analyses*, herunder specielt om *ranging*, hvis vi tillader en enkelt koefficient at variere, mens alt øvrigt fastholdes.

Hvis profitten pr. enhed af P1 øges eller mindskes, vil z^0 naturligvis ændres. Men det gælder ikke nødvendigvis de producerede mængder. Lad c_1 være profitten pr. produceret enhed af P1.

....

S3: Indenfor hvilket interval kan c_1 variere således at den optimale løsning udtrykt ved x_1^o, x_2^o er eentydigt bestemt?

....

Det er falsk varebetegnelse at sælge oksehalesuppe uden ringeste indhold af oksehaler. Vi vender nu ulighedstegnene i (K1) og (K2), der således udtrykker visse minimumskrav til de færdige produkter. Lad **LP-2** være identisk med **LP-1** (dvs. c_1 er atter lig 3) efter denne ændring, og lad (A,b,c) være koefficienterne i **LP-2**.

....

S4: Hvad vil `INITIALIZE-SIMPLEX (A,b,c)` returnere?

....

Undertiden kan der for en virksomhed være en vis afhængighed mellem forskellige produkter, eksempelvis hvis nogle af disse er reservedele til andre.

For hver enhed hvormed antallet af producerede enheder af P2 *overstiger 2* ønsker

VIRK at der laves *mindst q* enheder P1. Lad **LP-3** være identisk med **LP-1** efter tilføjelse af denne begrænsning kaldet (K4).

....

S5: **S5.1) Formuler (K4).**

S5.2) For hvilken værdi af q vil den samlede profit i en optimal løsning til LP-3 være lig 27?

....

Lad **DLP-1** være det duale problem til **LP-1**. Kald de duale variable $y_1, y_2, \ldots$.

....

S6: Løs DLP-1.

....

....

S7: Verificer at de komplementære restbetingelser (*Complementary Slackness*, cf. [CLRS] Problem 29-2) gælder for de optimale løsninger til LP-1 og DLP-1.

....

At overveje kapacitetsændringer i produktionsapparatet er en særdeles nærliggende tanke for enhver virksomhedsleder.

Vi går nu tilbage til **LP-1**, men ændrer på højresiden i (K3):

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + \Delta \qquad \text{(ny K3)}$$

hvor Δ blot er et reelt tal.

z^0 var profitten opnået i en optimal løsning til **LP-1**, jfr. **S1** ovenfor.

....

S8: Udskift (K3) med (ny K3). Hvor meget øges profitten for $\Delta = 2$?

....

En begrænsning kaldes *redundant* (overflødig), hvis dens fjernelse ikke ændrer mængden af mulige løsninger.

....

S9: Udskift (K3) med (ny K3). For hvilke værdier af Δ er (ny K3) redundant?

....

☺☺☺☺☺ ☺☺☺☺☺ ☺☺☺☺☺ ☺☺☺☺☺