Minimum-cost flow-problemet

Videregående Algoritmik 2007/2008, Projektopgave 1

Christian Wulff-Nilsen

23. november 2007

Dette er den første af to projektopgaver på kurset Videregående Algoritmik, blok 2, 2007/2008. Opgaven skal løses i grupper på 2 eller 3 personer. Hvis en studerende ønsker at arbejde alene, forudsætter dette en forhåndsgodkendelse fra en instruktor. Opgaven er normeret til 1-2 arbejdsdage pr. studerende.

Opgaven stilles d. 23. november og skal afleveres i 1.-dels-administrationen i 2 eksemplarer inden **d. 5. december 2007 kl. 12**. Husk at udfylde forsiden inden aflevering.

Besvarelsen skal godkendes, for at gruppens medlemmer kan indstille sig til den skriftlige eksamen eller senere reeksaminationer. Der er ikke mulighed for genaflevering af en ikke godkendt besvarelse.

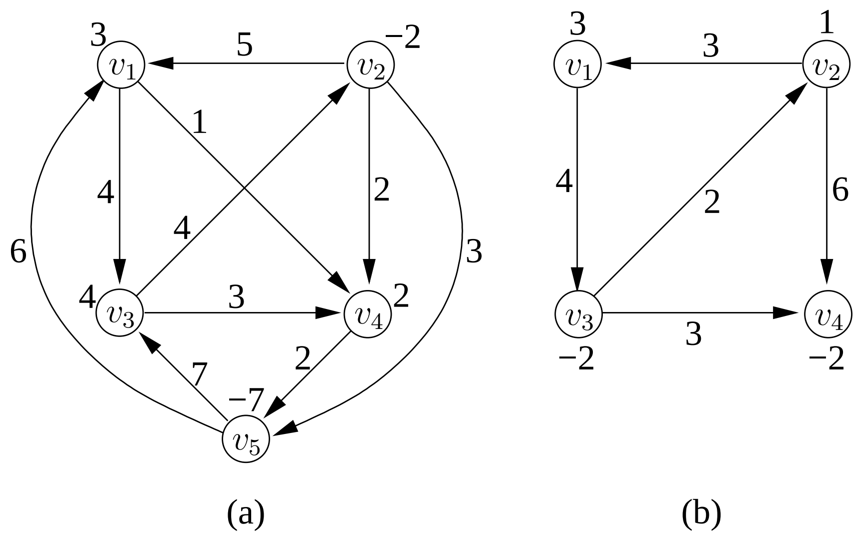
Opgave 1: b-strømning

Lad $G = (V, E)$ være en orienteret graf. For hver knude $v \in V$ lader vi $\delta^+(v)$ være mængden af udgående kanter fra v og $\delta^-(v)$ være mængden af indgående kanter til v.

Hver kant $e \in E$ har en *kapacitet* $u_e \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, og hver knude $v \in V$ har et såkaldt *demand* $b_v \in \mathbb{R}$.

Vi ønsker (om muligt) at finde en *b-strømning*, som er en tildeling af reelle tal x_e til hver kant $e \in E$ således, at

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = b_v, \forall v \in V,$$
$$0 \le x_e \le u_e, \forall e \in E.$$



Figur 1: Grafer med kapaciteter og demands (f.eks. har knude v_2 demand -2 og kant (v_1, v_3) kapacitet 4 i (a)).

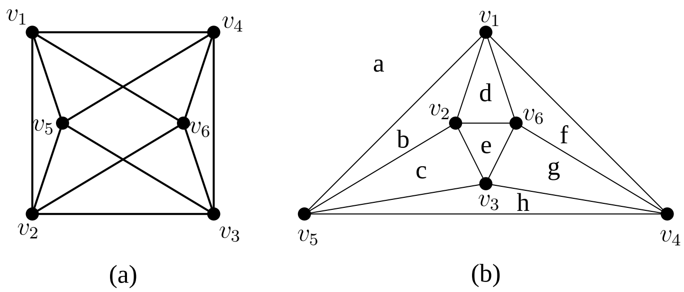
Find, for hver af de to grafer i Figur 1, en b-strømning for grafen eller argumenter for, at grafen ikke har nogen b-strømning.

Opgave 2: Minimum-cost flow-problemet

Betragt en graf G med kapaciteter og demands som i Opgave 1 og desuden en omkostning $c_e \in \mathbb{R}$ for hver kant $e \in E$. Givet en b-strømning $\{x_e | e \in E\}$ i G, da defineres dens omkostning som $\sum_{e \in E} c_e x_e$.

I *minimum-cost flow-problemet (MCFP)* ønsker vi at finde en b-strømning i G med minimal omkostning.

Opskriv MCFP på standard-form for instansen i Figur 1(a) med omkostninger $c_{v_1 v_3} = 1$, $c_{v_1 v_4} = 2$, $c_{v_2 v_1} = 3$, $c_{v_2 v_4} = 4$, $c_{v_2 v_5} = 5$, $c_{v_3 v_2} = 6$, $c_{v_3 v_4} = 7$, $c_{v_4 v_5} = 8$, $c_{v_5 v_1} = 9$ og $c_{v_5 v_3} = 10$. Formuler det duale problem til det fundne LP-problem.



Figur 2: (a): En graf og (b): en planar indlejring af denne graf. Indlejringen inddeler planen i sideflader a, b, c, d, e, f, g og h, hvor a er ekstern.

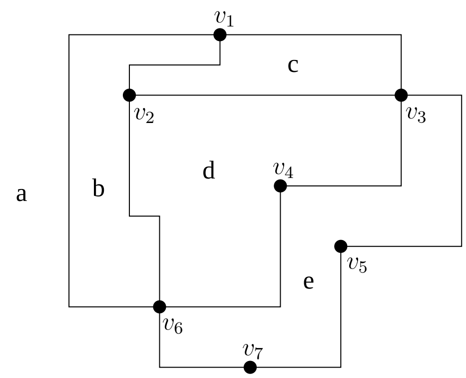
Opgave 3: En anvendelse af MCFP: rektilineær planar indlejring

Vi vil nu se på en anvendelse af MCFP på et geometrisk problem i planen. Lad os i det følgende antage, at $G = (V, E)$ er en ikke-orienteret graf, og af tekniske årsager vil vi antage, at G er sammenhængende og består af mindst tre knuder, samt at G ikke har nogen *snitknuder*, dvs. knuder, der, hvis de fjernes, giver en ikke-sammenhængende graf (den studerende kan blot ignorere disse tekniske detaljer). Vi antager desuden, at ingen knuder i G har grad større end 4.

Definer en *planar indlejring* af G til at være en tegning af G i planen således, at hvert par af kanter kun overlapper i evt. fælles endepunkter. Et eksempel er givet i Figur 2. Hvis grafen er tegnet således, at hver kant består udelukkende af lodrette og vandrette liniestykker, siges indlejringen at være *rektilineær* (se Figur 3). For en sådan indlejring defineres *knækpunkter* til at være de punkter, hvor vandrette og lodrette liniesegmenter fra *samme* kant mødes.

Bemærk at en planar indlejring inddeler planen i et antal områder, som vist i Figur 2(b). Vi kalder disse områder for *sideflader*. Netop en af disse sideflader er ubegrænset, og vi kalder denne for den *eksterne sideflade*. Knuderne og kanterne i en sideflade udgør en kreds (dette vil vi ikke vise). Vi kalder en sådan kreds for en *grænsekreds*.

Antag nu at vi har en planar indlejring af G. Da defineres et *rektilineært layout* af G til at være en rektilineær indlejring af G, der indeholder de samme grænsekredse som den givne indlejring.



Figur 3: En rektilineær indlejring af en graf. Eksempel: grænsekreds d laver en indvendig drejning i v_2, v_3 og v_6 og en udvendig drejning i v_4.

Problemet, vi betragter i denne opgave, er at finde et rektilineært layout af G med et minimalt antal knækpunkter. Idéen er at indføre variable, der holder styr på antallet af knækpunkter samt variable, der sikrer, at løsningen er lovlig, og på basis heraf formulere problemet som en instans af MCFP.

I det følgende vil vi betragte et rektilineært layout (som vi dog ikke kender eksplicit).

Givet en grænsekreds f i dette rektilineære layout og en knude v i f, da siges f at lave en *indvendig drejning* i v, hvis de to kanter i f udgående fra v danner en vinkel i v på mindre end 180° set fra f. Hvis vinklen er større end 180°, siges f at lave en *udvendig drejning* i v. Et eksempel er givet i Figur 3. Vi definerer indvendige og udvendige drejninger i knækpunkter tilsvarende.

For hver grænsekreds f og hver knude v i f indføres en variabel x_{vf}, der fastlægges som følger

$$x_{vf} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } f \text{ laver en indvendig drejning i } v \\ -1 & \text{hvis } f \text{ laver en udvendig drejning i } v \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Lad f og g være to grænsekredse med fælles kant e. Vi definerer variablen z_{fg} til at være antallet af indvendige drejninger, som f laver i knækpunkter i e (hvis f og g har flere fælles kanter, summeres over alle disse kanter). Bemærk at z_{fg} og z_{gf} er to forskellige variable.

Opgave 3.1

Angiv værdierne af alle variable z_{fg} og x_{vf} for den rektilineære indlejring i Figur 3. Hvor mange knækpunkter har denne indlejring?

Tegn et rektilineært layout af grafen fra Figur 2(a) givet den planare indlejring i Figur 2(b).

Opgave 3.2

Lad f være en grænsekreds i en rektilineær indlejring. Det kan vises, at antallet af indvendige drejninger minus antallet af udvendige drejninger, som f laver i sine knuder og knækpunkter, er -4, hvis f svarer til den eksterne sideflade, og ellers 4.

Udtryk disse begrænsninger som lineære begrænsninger i de tidligere indførte variable.

Verificer at begrænsningerne gælder for grænsekredse a og e i Figur 3.

Opgave 3.3

I starten af opgaven antog vi, at ingen knude i G har grad større end 4. Hvorfor er denne antagelse nødvendig?

Det følger desuden af vores antagelser om G, at ingen knude har grad mindre end 2 (dette ønskes ikke vist). Vis at der må gælde

$$\sum_f x_{vf} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } v \text{ har grad } 2 \\ 2 & \text{hvis } v \text{ har grad } 3 \\ 4 & \text{hvis } v \text{ har grad } 4 \end{cases} \tag{1}$$

for hver knude v (summen ovenfor skal forstås som, at der summeres over alle grænsekredse indeholdende v).

Opgave 3.4

Vi ønsker at minimere antallet af knækpunkter. Formuler en objektfunktion, hvis minimering sikrer dette. Objektfunktionen skal udtrykkes i de tidligere indførte variable.

Opskriv et lineært program med denne objektfunktion og med følgende begrænsninger:

a Begrænsningerne fra Opgave 3.2.

b Begrænsningerne fra Opgave 3.3.

c Alle variable z_{fg} er ikke-negative.

Følgende resultat kan benyttes uden bevis: *En optimal løsning til det opskrevne lineære program har heltallige værdier af variablene x_{vf} og z_{fg}.*

Opgave 3.5

Omskriv det lineære program fra Opgave 3.4 til en instans af MCFP. Det er vigtigt at formulere begrænsningerne således, at de er på formen defineret i Opgave 1. Beskriv hvilke knuder og kanter, der indgår i den tilhørende graf, og hvad knudernes demands og kanternes kapaciteter og omkostninger er.

Opskriv dernæst instansen af MCFP svarende til indlejringen i Figur 2(b).

Vink: foretag en passende substitution af visse variable for at sikre, at de er ikke-negative.

Noter til Opgave 3

Det kan vises, at en optimal løsning til ovenstående instans af MCFP svarer til et rektilineært layout med et minimalt antal knækpunkter. Desuden kan det vises, at det er forholdsvist nemt at finde dette layout, når den optimale løsning til MCFP-instansen er fundet. For at begrænse opgavens omfang, vil vi undlade at komme nærmere ind på dette.

Opgave 4: Reduktion til MCFP

I Opgave 3 måtte vi modificere visse variable for at sikre, at de var ikke-negative, som påkrævet i MCFP.

I denne opgave betragter vi et (tilsyneladende) mere generelt problem end MCFP. Her tillades, at både de øvre og nedre grænser for kapaciteterne kan være vilkårlige konstanter. Specielt tillades altså negative variabel-værdier.

Betragt en graf G som i Opgave 2 og antag endvidere, at der er knyttet en *nedre* kapacitetsgrænse $l_e \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ til hver kant $e \in E$.

I det *generelle minimum-cost flow-problem (GMCFP)* skal der findes en tildeling af tal x_e til hver kant e med minimal omkostning $\sum_{e \in E} c_e x_e$, så der gælder

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = b_v, \forall v \in V,$$
$$l_e \le x_e \le u_e, \forall e \in E.$$

Bemærk at enhver instans af MCFP er en instans af GMCFP. Dermed kan en algoritme, der løser GMCFP, også løse MCFP.

I denne opgave ønsker vi at vise, at dette i en vis forstand også gælder den anden vej, altså at en algoritme til MCFP kan bruges til at løse GMCFP. Vi vil gøre dette ved at foretage det, der kaldes en *reduktion* af GMCFP til MCFP.

I denne opgave definerer vi en sådan reduktion ved en afbildning f fra mængden af GMCFP-instanser til mængden af MCFP-instanser, så:

1) Hvis I_{GMCFP} er en instans af GMCFP med knudemængde V og kantmængde E, da er $f(I_{GMCFP})$ en instans af MCFP med $O(V)$ knuder og $O(E)$ kanter.

2) Givet en optimal løsning til $f(I_{GMCFP})$, da kan denne løsning konverteres til en optimal løsning til I_{GMCFP}.

Disse punkter sikrer, at hvis vi har givet en algoritme $\mathcal{A}$ til MCFP, da fås en algoritme til GMCFP ved først at reducere en instans af GMCFP til en instans af MCFP og dernæst anvende $\mathcal{A}$ på den nye instans. Det første punkt begrænser størrelsen af denne nye instans. Den fundne optimale løsning (såfremt en sådan findes) kan derefter konverteres til en optimal løsning til GMCFP.

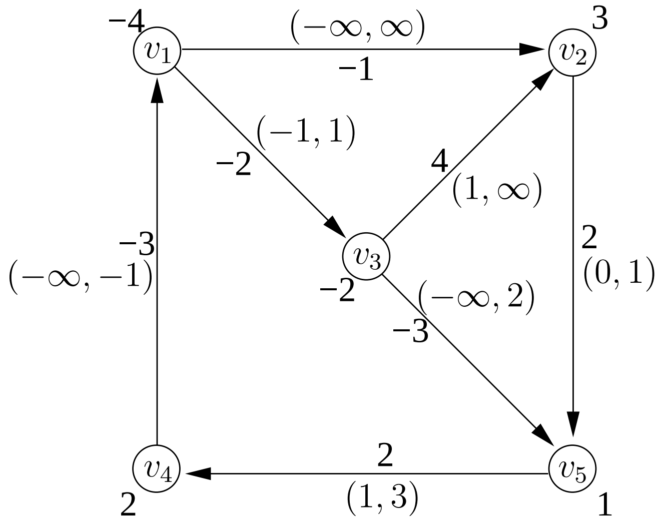
I Opgave 4.1 til 4.3 vil vi modificere en generel instans af GMCFP til en instans af MCFP i flere mindre trin. For at kunne besvare Opgave 4.4-4.5, er det vigtigt, at disse trin tilsammen udgør en reduktion.

Antag at vi har givet en instans I_0 af GMCFP, dvs. vi har givet en orienteret graf $G = (V, E)$ med værdier af variablene l_e, u_e, b_v og c_e.

Opgave 4.1

Modificer I_0 til en instans I_1 af GMCFP, hvor det for hver kant e gælder, at mindst en af variablene l_e og u_e er endelige.

Illustrer dette på den konkrete instans af GMCFP i Figur 4.



Figur 4: En instans af GMCFP. Til hver knude er knyttet et demand og til hver kant er knyttet en omkostning samt et talpar, der angiver nedre og øvre grænse for kantens kapacitet.

Vink: foretag sammentrækninger af visse kanter til knuder og modificer demands og omkostninger passende i den resulterende graf. Husk at tage højde for at der kan opstå flere kanter mellem samme knudepar i den resulterende graf.

Opgave 4.2

Modificer I_1 til en instans I_2 af GMCFP, hvor det for hver kant e gælder, at l_e er endelig.

Illustrer dette på den konkrete instans fundet i Opgave 4.1.

Opgave 4.3

Modificer I_2 til en instans I_3 af GMCFP, hvor det for hver kant e gælder, at $l_e = 0$.

Illustrer dette på den konkrete instans fundet i Opgave 4.2.

Opgave 4.4

Bemærk at instansen I_3 i Opgave 4.3 er en instans af MCFP. Vis at den har $O(V)$ knuder og $O(E)$ kanter.

Opgave 4.5

Vis hvordan man kommer fra en optimal løsning til I_3 til en optimal løsning til I_0.

Vink: vis først hvordan man kommer til en optimal løsning til I_2, dernæst til en optimal løsning til I_1 og til sidst til en løsning til I_0.

Illustrer dette ved at løse den konkrete MCFP-instans fundet i Opgave 4.3 og derefter vise, hvordan man kommer fra denne optimale løsning til en optimal løsning til instansen af GMCFP i Figur 4.