

Answers, Written Exam, January 2006, David Pisinger

Svar 11 Fra ligningen

$$x_2 + \frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{10}s_2 = \frac{25}{10}$$

fås Gomory uligheden

$$\frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{10}s_2 \geq \frac{5}{10}$$

Ved indsættelse af $s_1 = 9 + 4x_1 - 6x_2$ og $s_2 = 4 - x_1 - x_2$ fås

$$(9 + 4x_1 - 6x_2) + 4(4 - x_1 - x_2) = 25 - 10x_2 \geq 5$$

der reduceres til $x_2 \leq 2$. Så det rigtige svar er 11A). ■

Svar 12 Der gælder at

$$\begin{aligned} K \cap H &= \text{conv}(\{x \in \mathbb{B}^7 \mid 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 \leq 15 \wedge x_6 = x_7 = 1\}) \\ &= \text{conv}(\{x \in \mathbb{B}^7 \mid 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 9x_5 \leq 6\}) \end{aligned}$$

Heraf ses at $x_1 = x_2 = x_5 = 0$. Så dimensionen $\dim(K \cap H)$ er 2, da vi kun kan finde de affint uafhængige punkter $(x_3, x_4) = (0, 0)$, $(x_3, x_4) = (1, 0)$ og $(x_3, x_4) = (0, 1)$. Rigtige svar er 12C). ■

Svar 13 Vi har uligheden

$$8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 \leq 15$$

og det minimale cover $C = \{1, 2, 3\}$. For at finde det største α så $x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 \leq 2$ er en lovlig ulighed løser vi problemet:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

som har løsningen $\gamma = 1$. Så det største valg af α er $\alpha = 2 - \gamma = 1$.

Vi forsøger nu at løfte uligheden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Vi søger det største β så uligheden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \beta x_5 \leq 2$$

er lovlig. Dertil løser vi problemet:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

som har løsningen $\gamma = 1$. Så det største valg af β er $\beta = 2 - \gamma = 1$. Den rigtige løsning er 13D). ■

Svar 14 Den optimale løsning er

vare	rute	antal varer
1	1→4→2→5	2
2	2→1→4	1
2	2→3→6→5→4	1
3	6→2→3	2

Den samlede pris af strømmingen er $z = 37$. Svar 14F). ■

Svar 15 Vi har følgende ruter

vare k	rute r	d_k	pris pr enhed	samlet pris
1	1→4→2→3→6→5	2	7	14
1	1→4→2→5	2	3	6
2	2→1→4	2	9	18
2	2→3→6→5→4	2	6	12
2	2→5→4	2	2	4
3	6→2→3	2	8	16
3	6→5→4→2→3	2	4	8

Ruten 6→2→5→4→2→3 er ikke en simpel rute, da den indeholder en kred. Rigtige svar 15H). ■

Svar 16 Den reducerede omkostning af ruten 1→4→2→3→6→5 er $c_r = 14 - \bar{y}_1 - 2y_{42} = 14 - 28 - 2 \cdot (-4) = -6$. Svar 16D). ■

Svar 17 Vi har de duale variable $y_{23} = -3$, $y_{25} = -7$, $y_{42} = -4$ og øvrige $y_{ij} = 0$, mens $\bar{y}_1 = 28$, $\bar{y}_2 = 18$, $\bar{y}_3 = 22$. De reducerede omkostninger af lovlige (simple) ruter er:

vare k	rute r	pris	reduceret pris
1	1→4→2→3→6→5	14	$14 - \bar{y}_1 - 2y_{42} - 2y_{23} = 14 - 28 + 8 + 6 = 0$
1	1→4→2→5	6	$6 - \bar{y}_1 - 2y_{42} - 2y_{25} = 6 - 28 + 8 + 14 = 0$
2	2→1→4	18	$14 - \bar{y}_2 = 18 - 18 = 0$
2	2→3→6→5→4	12	$12 - \bar{y}_2 - 2y_{23} = 12 - 18 + 6 = 0$
2	2→5→4	4	$4 - \bar{y}_2 - 2y_{25} = 4 - 18 + 14 = 0$
3	6→2→3	16	$16 - \bar{y}_3 - 2y_{23} = 16 - 22 + 6 = 0$
3	6→5→4→2→3	8	$8 - \bar{y}_3 - 2y_{42} - 2y_{23} = 8 - 22 + 8 + 6 = 0$

så der er ingen ruter som har negativ reduceret omkostning. Rigtige svar 17I). ■

Svar 18 Hvis vi Lagrange relaxerer begrænsning (5) får vi problemet

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} d_k^k x_{ij}^k - \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ij} \left(\sum_{k \in K} d_k^k x_{ij}^k - u_{ij} \right) \quad (12)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \quad (13)$$

$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \quad (14)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \quad (15)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (16)$$

og der skal gælde at $\lambda_{ij} \leq 0$ for alle $(i, j) \in E$, idet vi betragter et minimeringsproblem. (Hvis $\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij}$ får vi et negativt bidrag i objektfunktionen fra Lagrange-leddet, som ønsket.) Rigtig svar 18B). ■

Svar 19 De to spørgsmål kan besvares som følger:

- a) I path formuleringen betragter vi samtlige ruter fra s_k til t_k for alle varer k . Da kapaciteterne på kanterne er større end alle vare-behov d_k indgår samtlige ruter i begge formuleringer. Enhver løsning til path formuleringen kan transformeres til en løsning for den simple formulering ved at spalte rute-variablene op i kant-variable. Omvendt vil enhver løsning til det simple problem kunne transformeres til en løsning til path formuleringen ved at opskrive kant-variablene som sum af ruter. Følgelig er løsningsrummet for de to problemer ens, og de to grænseværdi også ens.

Man kan alternativt udregne grænseværdien for de to problemer. Fra opgave S14 ved vi at den optimale løsning til LP-relaxeringen af den simple formulering er $z_{\text{simple}} = 37$. Da kolonnegenereringen terminerede i spørgsmål S17, må de duale variable fra spørgsmål S16 være de duale variable for hele master problemet givet ved (7)-(10). Objektfunktionen af det duale problem er $z_{\text{path}} = \sum_{e \in E} u_{ij} y_{ij} + \sum_{k \in K} \bar{y}_k = u_{23} y_{23} + u_{25} y_{25} + u_{42} y_{42} + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 3(-3) + 2(-7) + 2(-4) + 28 + 18 + 22 = 37$.

- b) Vi bemærker at den simple formulering (1) til (6) har diagonal-struktur, hvor "joint-constraint" er kapacitetsbegrænsningen (5). Wolsey, theorem 11.2 siger nu at $z^{LPM} = z^{LD}$ dvs. at LP-løsningen til master problemet har samme løsningsværdi som LP-løsningen til det Lagrange duale problem. Derfor må det bedste valg af Lagrange multiplikatorer svare til de duale variable i master problemet. Men dette betyder at

$$\lambda_{23} = -3, \lambda_{25} = -7, \lambda_{42} = -4$$

mens alle øvrige $\lambda_{ij} = 0$.

Man kan også indse ovenstående ved at "gætte" Lagrange multiplikatorer lig med de duale variable y_{ij} . Ved løsning af det Lagrange relaxerede problem finder man løsningen $68 + (3(-3) + 2(-7) + 2(-4)) = 68 - 9 - 14 - 8 = 68 - 31 = 37$. Da dette er den bedste grænseværdi vi kunne håbe på, er de valgte Lagrange multiplikatorer optimale.

■

Svar 20 Beslutningsvariablen x_{ij}^k angiver om vare $k \in K$ strømmer langs kanten $(i, j) \in E$, mens beslutningsvariablen y_{ij} angiver om kant $(i, j) \in E$ bliver etableret. Dermed bliver modellen

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in E} c_{ij} d_k x_{ij}^k + \sum_{(i, j) \in E} f_{ij} y_{ij} \quad (17)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \quad (18)$$

$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \quad (19)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \quad (20)$$

$$\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (21)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij} \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (22)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (23)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in E \quad (24)$$

Objektfunktionen (17) minimerer summen af rutningsproblemet samt etableringsomkostningerne. Begrænsning sikrer (18) flow bevarelse, mens (19) sikrer at vare k sendes fra s_k , og (20) sikrer at vare k ankommer til t_k . Begrænsning (21) angiver kapaciteten af hver kant (i, j) , mens begrænsning (22) sikrer at hvis vi benytter kant (i, j) (dvs. $x_{ij}^k > 0$) så skal vi også betale prisen for at etablere kanten (dvs. $y_{ij} = 1$). Endelig angiver (23) at varen godt må deles, og (24) angiver at etablering af kanter er en binær beslutning. ■