

## Videregående Algoritmik

David Pisinger, DIKU

Eksamen, januar 2006

## Gomory Snit

Betragt følgende optimeringsproblem

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 - 2x_2 \\ & \text{subject to} && -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & && x_1 + x_2 \leq 4 \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Ved tilføjelse af slack variable  $s_1, s_2 \geq 0$  for de to begrænsninger, og løsning af LP-relaxeringen af problemet med Simplex algoritmen, fremkommer følgende to ligninger

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{10}s_2 &= \frac{25}{10} \\ x_1 - \frac{1}{10}s_1 + \frac{6}{10}s_2 &= \frac{15}{10} \end{aligned}$$

Udled et Gomory snit fra den første Simplex ligning hvori basisvariablen antager en fraktionær værdi.

**S 11:** Hvilken ulighed fremkommer efter eliminering af slack variablene?

11A)  $x_2 \leq 2$

11D)  $-3x_1 + 5x_2 \leq 7$

11B)  $x_1 \leq 3$

11E)  $-x_1 + x_2 \leq 1$

11C)  $x_2 \leq \frac{5}{2}$

11F)  $-3x_1 + 5x_2 \leq 5$

## Cover uligheder

Lad

$$K = \text{conv}(\{x \in \mathbb{B}^7 \mid 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 \leq 15\})$$

Lad endvidere

$$H = \{x \in \mathbb{B}^7 \mid x_6 = x_7 = 1\}$$

**S 12:** Hvad er dimensionen  $\dim(K \cap H)$ ?

12A)  $\dim(K \cap H) = 0$

12D)  $\dim(K \cap H) = 3$

12B)  $\dim(K \cap H) = 1$

12E)  $\dim(K \cap H) = 4$

12C)  $\dim(K \cap H) = 2$

12F)  $\dim(K \cap H) = 5$

Et minimalt cover for uligheden i  $K$  er  $C = \{1, 2, 3\}$ , der giver ophav til cover uligheden  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ . Vi vil gerne løfte denne ulighed til en lovlig ulighed på formen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 + \beta x_5 \leq 2$$

**S 13:** Hvis vi først finder den største værdi af  $\alpha$  og derefter den største værdi af  $\beta$  hvilke værdier finder vi

13A)  $\alpha = 0, \beta = 0$

13D)  $\alpha = 1, \beta = 1$

13B)  $\alpha = 0, \beta = 1$

13E)  $\alpha = 1, \beta = 2$

13C)  $\alpha = 1, \beta = 0$

13F)  $\alpha = 2, \beta = 1$

## Kolonnegenerering

Betragt følgende *minimum cost multicommodity flow problem*, defineret på en vægtet orienteret graf  $G = (V, E, c, u)$  hvor hver kant  $(i, j) \in E$  har en tilhørende omkostning  $c_{ij}$  og en kapacitet  $u_{ij}$ . Endvidere er der givet et antal varer (commodities)  $K = \{1, \dots, m\}$  som hver er givet ved triplen  $(s_k, t_k, d_k)$ . Her angiver  $s_k$  hvorfra vare  $k$  skal sendes,  $t_k$  angiver destinationen for vare  $k$ , og  $d_k$  angiver hvor mange enheder der skal sendes. Vi søger den samlet set billigste strømning.

Beslutningsvariablen  $x_{ij}^k$  angiver om vare  $k \in K$  strømmer langs kanten  $(i, j) \in E$ . Dermed kan problemet formuleres:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} d_k x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \quad (2)$$

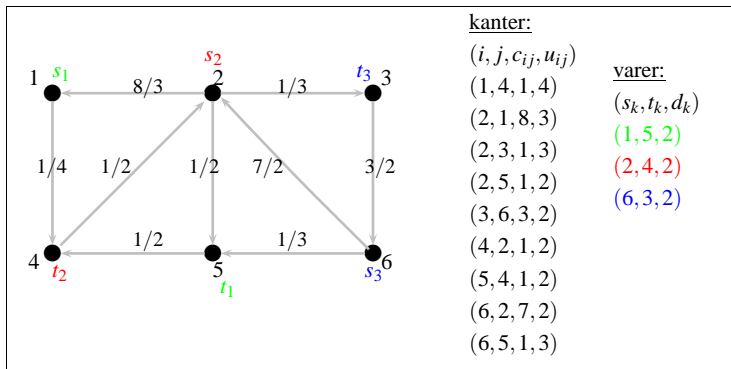
$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (5)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (6)$$

**S 14:** Løs følgende instans af multicommodity flow problemet i hånden, idet det antages at strømningerne på kanterne godt må være fraktionelle.



Hvad er prisen  $z$  af den samlet set billigste strømning?

14A)  $z = 32$

14B)  $z = 34$

14C)  $z = 36$

14D)  $z = 33$

14E)  $z = 35$

14F)  $z = 37$

**S 15:** Lad for hver vare  $k$  mængden  $R_k$  betegne samtlige simple ruter fra  $s_k$  til  $t_k$  gennem grafen  $G = (V, E, c)$ . Hvilken af følgende ruter tilhører ikke  $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ :

15A)  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$  pris 14      15E)  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$  pris 4

15B)  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  pris 6      15F)  $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  pris 16

15C)  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  pris 18      15G)  $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  pris 8

15D)  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$  pris 12      15H)  $6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  pris 22

Vi vil benytte en *path formulering* af multicommodity flow problemet, idet det fortsat tillades at strømningen langs kanterne er *fraktionel*. Lad  $a_{r,ij}^k$  angive om rute  $r \in R_k$  benytter kant  $(i, j)$ , og lad  $c_r^k$  angive prisen for rute  $r \in R_k$ . Lad  $x_r^k$  for hver rute  $r \in R_k$  angive om ruten benyttes for vare  $k$ . Dermed bliver modellen:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} c_r^k x_r^k \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} d_k a_{r,ij}^k x_r^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (8)$$

$$\sum_{r \in R_k} x_r^k \geq 1 \quad k \in K \quad (9)$$

$$0 \leq x_r^k \leq 1 \quad k \in K, r \in R_k \quad (10)$$

Her sikrer (8) at kapaciteten af hver kant bliver respekteret, mens (9) sikrer at den fornødne mængde varer sendes fra  $s_k$  til  $t_k$ . Endelig sikrer (10) at alle varer bliver sendt udelt ad samme rute. Vi vil løse problemet med forsinket kolonnegenerering. På et tidspunkt i kolonnegenereringen har vi et begrænset master problem med følgende fem ruter

vare $k$	rute	pris
1	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$	6
2	$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$	18
2	$2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$	4
3	$6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$	16
3	$6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$	8

Dette fører til følgende LP-model svarende til begrænsningerne (7) - (10):

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 6x_1^1 + 18x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_1^3 + 8x_2^3 & & \\
 \text{s.t.} & 2x_1^1 + 2x_1^2 & \leq 4 & (1,4) \\
 & & \leq 3 & (2,1) \\
 & & 2x_1^3 + 2x_2^3 \leq 3 & (2,3) \\
 & 2x_1^1 + 2x_2^2 & \leq 2 & (2,5) \\
 & & \leq 2 & (3,6) \\
 & 2x_1^1 & + 2x_2^3 \leq 2 & (4,2) \\
 & & 2x_2^2 + 2x_2^3 \leq 2 & (5,4) \\
 & & 2x_1^3 & \leq 2 & (6,2) \\
 & & 2x_2^3 & \leq 3 & (6,5) \\
 & x_1^1 & & \geq 1 & \\
 & & x_1^2 + x_2^2 & \geq 1 & \\
 & & x_1^3 + x_2^3 & \geq 1 & \\
 & 0 \leq x_1^1, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3 \leq 1 & & & (11)
 \end{array}$$

Lad  $y_{ij}$  betegne den duale variabel svarende til begrænsning (8) for kant  $(i, j)$ , og lad  $\bar{y}_k$  betegne den duale variabel svarende til begrænsning (9) for vare  $k$ . De duale variable for ovenstående model (11) er  $y_{25} = -7$ ,  $y_{42} = -4$  og øvrige  $y_{ij} = 0$ , mens  $\bar{y}_1 = 28$ ,  $\bar{y}_2 = 18$ ,  $\bar{y}_3 = 16$ .

**S 16:** Hvad er den reducerede omkostning af ruten  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$

- |         |          |
|---------|----------|
| 16A) 0  | 16D) -6  |
| 16B) -2 | 16E) -8  |
| 16C) -4 | 16F) -10 |

Vi vælger at tilføje ruten  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$  til modellen (11). Efter at have løst problemet til LP-optimalitet, finder vi de duale variable  $y_{23} = -3$ ,  $y_{25} = -7$ ,  $y_{42} = -4$  og øvrige  $y_{ij} = 0$ , mens  $\bar{y}_1 = 28$ ,  $\bar{y}_2 = 18$ ,  $\bar{y}_3 = 22$ .

**S 17:** Hvilken *simpel* rute har negativ reducerede omkostning

- |  |  |
|--|--|
| 17A) $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ | 17E) $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$   |
| 17B) $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$                             | 17F) $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$   |
| 17C) $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$   | 17G) $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$               |
| 17D) $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$               | 17H) $6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ |
| 17I) ingen simpel rute har negativ reduceret omkostning                        |  |

**S 18:** Betragt igen formuleringen (1) til (6). Hvis vi Lagrange relaxerer begrænsning (5), hvilken objektfunktion fremkommer så

- 18A)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}$ , hvor  $\lambda_{ij} \geq 0$   
 18B)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}$ , hvor  $\lambda_{ij} \leq 0$   
 18C)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}$ , hvor  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$   
 18D)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k$ , hvor  $\lambda_{ij} \geq 0$   
 18E)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k$ , hvor  $\lambda_{ij} \leq 0$   
 18F)  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k$ , hvor  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

*Hint:* Husk at vi betragter et minimeringsproblem, når domænet af  $\lambda_{ij}$  bestemmes.

**S 19: (tekst spørgsmål)**

- a) Vis at værdien af den fundne LP-løsning for de to formuleringer (simpel formulering og path formulering) er den samme for den betragtede instans i spørgsmål S 14.  
 b) Hvad er det optimale valg af Lagrange multiplikatorer ( $\lambda_{ij}$ ) for den betragtede instans i spørgsmål S 14, når vi Lagrange relaxerer begrænsning (5) i formuleringen (1) til (6).

## Network design

Betragt igen minimum cost multicommodity flow problemet givet ved (1) til (6). Antag at vi *både* skal bygge netværket *og* samtidig finde den samlet set billigste strømning. Det koster  $f_{ij} \geq 0$  at etablere en kant  $(i, j) \in E$ , og der kan kun strømme noget gennem en kant hvis den er etableret. Lad beslutningsvariablen  $y_{ij} \in \{0, 1\}$  angive om kanten er blevet etableret.

**S 20: (tekst spørgsmål)**

Formuler en MIP-model som kan bruges til at løse det kombinerede problem.