

DATV: Introduktion til optimering og operationsanalyse

Multicommodity Flow Problem

David Pisinger, *Projekt opgave 2*, blok 2, DIKU, 2007-08

Dette er den anden obligatoriske projektopgave på kurset "DATV: Introduktion til optimering og operationsanalyse". Opgaven skal afleveres senest mandag 7. januar 2008 kl. 12.00 i DIKU's studieadministration. Besvarelsen skal udarbejdes i grupper på to til tre deltagere. Grupper med kun en deltager kræver accept fra instruktoren. For at blive godkendt skal der være gjort et reelt forsøg på at løse samtlige spørgsmål. Læs venligst hele opgaveformuleringen igennem inden du går i gang. Hints til opgaverne kan fås ved øvelserne, hvor der er afsat tid til at arbejde med projektopgaven.

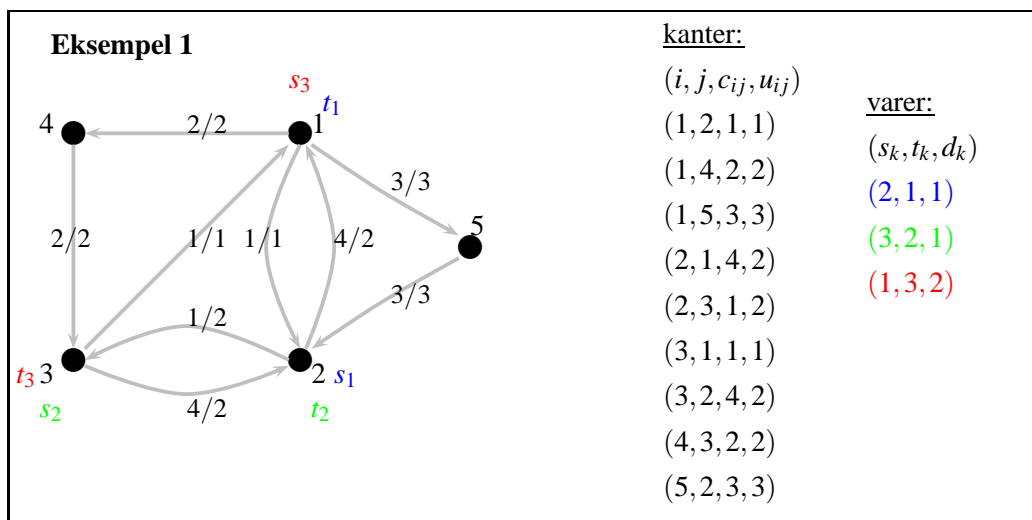
Indledning

Multicommodity flow problemet er en generalisering af strømningproblemer til den situation hvor flere varer (*commodities*) deles om netværket. Multicommodity flow problemet er blevet brugt til at modellere og løse adskillige optimeringsproblemer, heriblandt godstransport på et jernbanenet, kommunikation via et kabelnet og olietankerplanlægning [2].

I denne opgave vil vi betragte svage og stærke formuleringer af Minimum cost multicommodity flow problemet, samt diskutere deres fordele og ulemper.

Lad der være givet en vægtet orienteret graf $G = (V, E, c, u)$ hvor hver kant $(i, j) \in E$ har en tilhørende omkostning c_{ij} og en kapacitet u_{ij} . Endvidere er der givet et antal varer (*commodities*) $K = \{1, \dots, m\}$ som hver er givet ved triplen (s_k, t_k, d_k) . Her angiver s_k hvorfra vare k skal sendes, t_k angiver destinationen for vare k , og d_k angiver hvor mange enheder der skal sendes.

Vi benytter beslutningsvariablen x_{ij}^k til at angive om vare $k \in K$ strømmer langs kanten $(i, j) \in E$.



Opgave 1 Løs ovenstående multicommodity flow problem i hånden, idet det antages at strømningerne på kanterne godt må være fraktionelle. (f.eks. hvis varerne er mel, sukker, olie e.l. således at den givne last kan deles vilkårligt). ■

Vi kan formulere multicommodity flow problemet som et LP-problem. Lad variablen x_{ij}^k angive om vare k strømmer langs kant (i, j) . Den første begrænsning (2) sikrer flow bevarelse. Den næste begrænsning (3) sikrer for hvert k at varen strømmer ud fra s_k . Den følgende begrænsning (4) sikrer for hvert k at varen strømmer ind til t_k . Endelig skal kapaciteten af hver kant respekteres i (5). Begrænsning (6) tillader at varer deles. Vi vil kalde denne formulering den *simple formulering*.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} d_k x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (5)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (6)$$

Opgave 2 Formuler eksempel 1 som et LP-problem og løs det til optimalitet ved brug af CPLEX. Vedlæg modellen og uddata. ■

I resten af denne opgave antager vi at alle strømninger skal være *udelelige*, dvs. for hver vare $k \in K$ skal de d_k enheder følge samme rute. Denne version af multicommodity flow problemet er \mathcal{NP} -hård, som vist af [1].

Opgave 3 Løs eksempel 1 til optimalitet, hvis alle varer skal transporteres udelt. ■

Opgave 4 Opskriv for hver vare k i eksempel 1, samtlige mulige ruter fra s_k til t_k gennem grafen $G = (V, E, c)$. En rute må kun benytte kanter hvori der kan strømme mindst d_k enheder, og den skal være simpel (dvs. kredsfri). Angiv for hver rute dens tilhørende pris for at sende d_k enheder. ■

Lad R_k betegne mængden af mulige ruter fra s_k til t_k hvor der kan strømme d_k enheder. Lad endvidere $a_{r,ij}^k$ angive om rute r for vare k benytter kant (i, j) , og lad \hat{c}_r^k angive prisen for rute $r \in R_k$. Vi kan benytte dette til at opskrive en alternativ formulering af multicommodity flow problemet, som vi betegner *path formuleringen*. Lad x_r^k for hver rute $r \in R_k$ angive om ruten benyttes for vare k . Dermed bliver modellen:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} \hat{c}_r^k x_r^k \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} d_k a_{r,ij}^k x_r^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (8)$$

$$\sum_{r \in R_k} x_r^k \geq 1 \quad k \in K \quad (9)$$

$$x_r^k \in \{0, 1\} \quad k \in K, r \in R_k \quad (10)$$

Opgave 9 Giv en intuitiv fortolkning af de duale variable y_{ij} og \bar{y}_k . ■

Opgave 10 Idet den intuitive fortolkning af de duale variable udnyttes, udregn en ny pris for hver rute fra opgave 4 som tager hensyn til de duale variable. (Hint: betragt de reducerede omkostninger af hver rute). Udvælg den mest lovende rute $r \in R_1 \cup \dots \cup R_m$, som skal tilføjes modellen (11). ■

Opgave 11 Udvid ovenstående path formulering (11) med den nye rute. Løs problemet til LP-optimalitet med CPLEX og find de nye duale variable. ■

Opgave 12 Formuler et stopkriterie for hvor længe man skal generere ruter. ■

Opgave 13 Gentag processen med at tilføje den mest lovende rute til modellen indtil stop-kriteriet mødes. Angiv den fundne løsningsværdi når processen standser. Diskuter hvor mange ruter det blev nødvendigt at tilføje til modellen. ■

Noter

Til opgaven benyttes CPLEX. Da der kun er nogle få CPLEX-licenser til rådighed på DIKU bedes man logge ud fra CPLEX relativt hurtigt efter at have kørt sin instans. CPLEX licenser er tilgængelige på bach-X og kand-X maskinerne.

Pisa Universitet har samlet adskillige instanser af Multi-commodity flow problemet [4]. En god introduktion til Multicommodity flow problemer findes i [2] samt [3].

Der er en del faldgruber i opgaven. Hvis man bruger følgende formulering i CPLEX

bounds

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

vil LP-løseren håndtere begrænsningerne implicit i simplex algoritmen, og man vil ikke have en dual variabel svarende til begrænsningen. Dette kan føre til at man udregner de reducerede omkostninger forkert.

Hvis man tilføjer begrænsningerne

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

som normale begrænsninger, vil CPLEX oplyse de duale variable svarende til begrænsningerne, men man skal være omhyggelig i beregningen af reducerede omkostninger.

Det nemmeste er at udelade begrænsninger på x -variablene. Det er ikke nødvendigt at sikre $x \leq 1$ da x aldrig vil antage en større værdi, og $x \geq 0$ er underforstået for alle LP-problemer.

Litteratur

- [1] Viggo Khan, "Maximum Integral k-multicommodity flow on trees"
<http://www.nada.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node121.html>
- [2] A.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin, "Network Flows – Theory, Algorithms, and Applications", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

- [3] Alexander Schrijver, “Advanced Graph Theory and Combinatorial Optimization” (2001)
<http://homepages.cwi.nl/~lex/files/agtco.ps>
- [4] Dept. of Computer Science, University of Pisa, “Multicommodity flow instances”
<http://www.di.unipi.it/di/groups/optimize/Data/MMCF.html>
- [5] L. A. Wolsey, “Integer Programming”, Wiley, Chichester, UK, 1999.