

Skriftlig eksamen, 4. januar 2005

Generelt om opgaven:

Opgaven omfatter 20 spørgsmål S1-S20.

S1-S5, S7-S8, S10 og S11-S18 er "multiple choice" spørgsmål. For hvert af disse er det eneste korrekte svar at finde blandt de angivne svarmuligheder. Uden nærmere forklaring bedes du blot *tydeligt* skrive fx. **7B** som svar på spørgsmål S7.

S6, S9 og S19-S20 er sædvanlige *tekstspørgsmål*.

Hvert korrekt svar til et

- multiple choice spørgsmål giver 4 points
- tekstspørgsmål giver op til 9 points

Der kan således opnås 100 points i alt.

S1-S5: Bryllupsfesten

Farmand er den glade giver ved sin datters forestående bryllup, der bl.a. skal fejres med middagsselskaber tre aftener i træk. Der skal ikke spares, men heller ikke ødsles. Farmands hobby er *optimeringsmetoder*, og ingen lejlighed forsømmes til at dyrke denne lidenskab, selv ikke, når der kun er tale om småpenge.

Historien handler om indkøb og vask af specielt designede servietter til de tre middage. Nye servietter kan hver dag købes så tidligt, at bordet kan dækkes smukt allerede samme dag og stå klar til modtagelse af gæster. *Nussede* servietter efter en middag kan henligge til dagen derpå eller i *timerne op til midnat* afleveres til et vaskeri. Dette vaskeri kan klare en "quick" vask, hvor servietterne er retur til brug allerede næste dag. Desuden tilbydes en billigere "slow" vask, hvilket kræver yderligere 1 dag på vaskeriet, dvs. servietterne kan tidligst genbruges to dage efter indleveringen. Eventuelle *rene* servietter (dvs. enten renvaskede servietter eller nye servietter indkøbt til senere dage) oplagres blot.

Der er ingen af de specielle servietter på lager i dækketøjsskabet forud for den første middag; alt må indkøbes og eventuelt vaskes. Efter den tredje middag ønskes intet restlager af nye servietter, og alle nussede servietter ryger i skraldespanden.

Endelig skal nævnes, at ingen af de inviterede gæster kunne drømme om at udeblive eller undlade at bruge deres serviet.

Følgende notation vedrører alt relevant på dag j :

d_j :	antal servietter, der skal bruges på dag j ,	$j=1,2,3$
x_j	antal servietter, der indkøbes på dag j	$j=1,2,3$
r_j	antal rene servietter, der gemmes til dag $j+1$,	$j=1,2$
n_j	antal nussede servietter, der gemmes til dag $j+1$,	$j=1,2$
q_j	antal nussede servietter, der sendes til quick-vask på dag j	$j=1,2$
s_j	antal nussede servietter, der sendes til slow-vask på dag j	$j=1$

Antal personer (= d_j) omkring bordet ved middag j :

$$d_1 = 40, \quad d_2 = 25, \quad d_3 = 36.$$

Man får ikke meget i disse tider for et par danske kroner, så lad møntfoden i det følgende være *EURO* (EUR):

Dag 1: Indkøbspris, pr. serviet	c_1	
Dag j : Indkøbspris, pr. serviet	3	$j=2,3$
Quick vask, pris pr. serviet:	2	
Slow vask, pris pr. serviet:	1	

At minimere de totale omkostninger (indkøb, vask), således at der er rene servietter til alle middage er tydeligvis et lineært programmeringsproblem kaldet **LP-1**.

Følgende orienterede graf $G' = (V, E')$ kan lette oversigten:

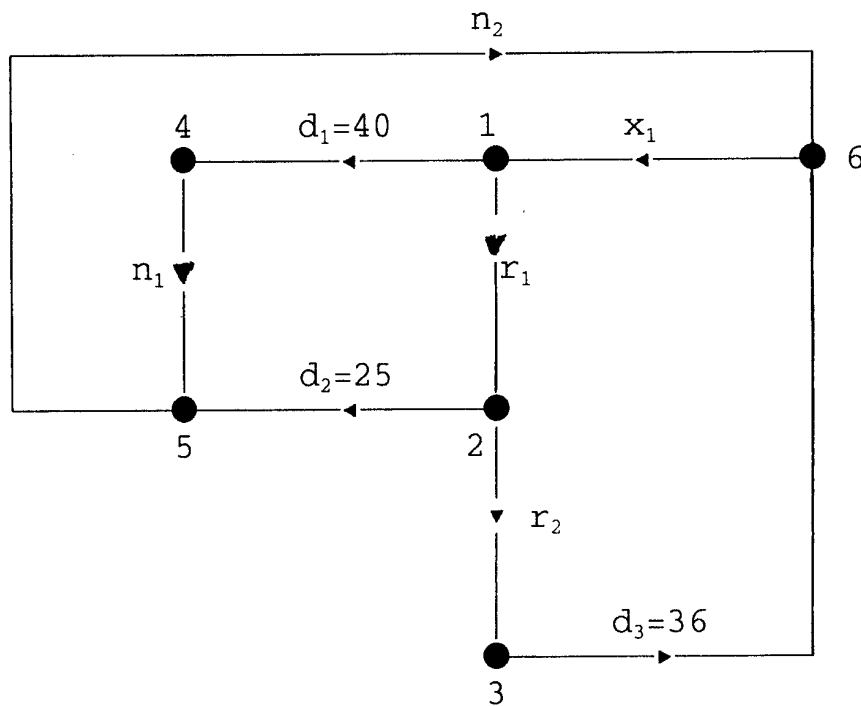


Fig. 1: $G' = (V, E')$. Kan suppleres til $G = (V, E)$ til illustration af **LP-1**.

Knude 6 er forretningen, hvor de nye servietter sælges, og samtidig "skraldespand" for nussede servietter. Opfattet således, skal grafen i sin helhed udtrykke, at servietter, rene såvel som nussede, *cirkulerer*, dvs. indstrømning = udstrømning for alle knuder.

For tre af de viste kanter er servietstrømmen givet som en konstant, hhv. 40, 25 og 36, jfr. fastsættelsen af d_1, d_2 og d_3 . Men der mangler $|E| - |E'|$ kanter før den endelige graf $G = (V, E)$ afbilder hele problemstillingen korrekt.

S1: Tilføj de manglende kanter på Fig. 1. Hvad er $|E| - |E'|$?

- 1A) 4 1B) 5 1C) 6 1D) 7 1E) 8

Indstrømning = udstrømning for en knude kaldes også *strømbevaring* og udtrykkes ved en *balanceligning*.

S2: For $G = (V, E)$, hvilken af følgende ligninger er en balanceligning:

$$2A) \quad r_1 + q_1 + x_2 + r_2 = 25$$

$$2B) \quad r_1 + q_1 + x_2 - r_2 = 25$$

$$2C) \quad r_1 + q_1 + x_2 - r_2 = -25$$

Bortset fra det i denne sammenhæng naturlige krav om at alle variable skal være ikke-negative, er alle begrænsninger i LP-1 af form som *ligninger*.

S3: Antag at begrænsningerne i LP-1 er skrevet på formen $Ax=b$. Hvad er *rangen* af koefficientmatricen A ?

$$3A) 4 \quad 3B) 5 \quad 3C) 6 \quad 3D) 7 \quad 1E) 8$$

Lad c_1 være lig 3. Løs LP-1 til optimalitet (*vink*: Fig. 1 samt lidt sund fornuft er tilstrækkeligt).

S4: Hvad slipper farmand med at betale for indkøb og evt. også vask af servietter?

$$4A) \text{ EUR } 197 \quad 4B) \text{ EUR } 207 \quad 4C) \text{ EUR } 217 \quad 4D) \text{ EUR } 227$$

Vi tillader nu c_1 at variere.

S5: Der skal i alt bruges $40+25+36 = 101$ rene servietter til de tre middage. For hvilke værdier af c_1 er det *eentydigt optimalt* at købe alle 101 servietter på dag 1?

$$5A) 0 < c_1 < 1 \quad 5B) 1 \leq c_1 < 1,8 \quad 5C) 1,8 \leq c_1 < 2 \quad 5D) 2 \leq c_1 < 3$$

Den vordende brud orker ikke at feste med familie og venner tre dage i træk, men foretrækker at starte bryllupsrejsen en dag tidligere end planlagt. Man beslutter derfor at aflyse den tredje middag.

Der skal dog stadig økonomiseres med servietter og vask. LP-2 er den således reducerede LP-model. $c_1 = 3$, som før. Begrænsningerne i LP-2 er tre balanceligninger, dvs. at der i DLP-2, det *duale* problem til LP-2, indgår tre duale variable y_1 , y_2 og y_3 .

S6 (tekstspørgsmål): Formuler DLP-2. Løs DLP-2 til optimalitet.

S7-S8: Hvedebrødsdage

Brudepar på bryllupsrejse kan foruden visse unævnelige ting være optaget af både korteste og længste veje. Lad $G'' = (V'', E'')$ være en stærkt-sammenhængende, vægtet, orienteret og *acyklisk* graf, der intet har med Fig. 1 og serviethistorien at gøre, men som på en eller anden måde synes relevant for de nygifte. For alle $(i, j) \in E''$, lad $w(i, j)$ være den ikke-negative vægt af kanten (i, j) . Endvidere, lad s og t være to forskellige knuder og lad

$d[j]$ være en variabel knyttet til knude j , alle $j \in V$.

To optimeringsproblemer kan nu formuleres:

MIN: minimer $\{ d[t]: d[s]=0, d[u] + w(u,v) \leq d[v], \text{ alle } (u,v) \in E \}$

MAX: maximer $\{ d[t]: d[s]=0, d[u] + w(u,v) \geq d[v], \text{ alle } (u,v) \in E \}$

Lad $d[t]_{\text{MIN}}$ og $d[t]_{\text{MAX}}$ være værdien af $d[t]$ i en optimal løsning til hhv. **MIN** og **MAX**.

S7: Er $d[t]_{\text{MIN}}$ vægten af

7A) en korteste vej fra s til t i G ?

7B) en længste vej fra s til t i G ?

7C) noget andet?

S8: Er $d[t]_{\text{MAX}}$ vægten af

8A) en korteste vej fra s til t i G ?

8B) en længste vej fra s til t i G ?

8C) noget andet?

S9-S10: Brudgommen ...

Brudgommen er postbud og har derfor en naturlig interesse i optimeringsproblemet kendt som *Chinese Postman*.

Lad H være en vægтет, orienteret graf. En kreds som tillader en vandrer at passere alle grafens kanter *netop 1 gang* i orienteringsretningen kaldes en *eulerkreds*, og H kaldes en *eulergraf* eller blot *eulersk* hvis en sådan kreds findes.

For en knude v , lad $ind(v)$ være antallet af kanter (u,v) i H . Tilsvarende er $ud(v)$ lig antallet af kanter (v,u) . H er en eulergraf, hvis H er stærkt-sammenhængende og $ind(v) = ud(v)$ for samtlige knuder.

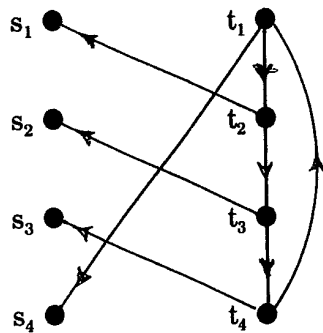


Fig. 2: En orienteret, ikke-eulersk graf H

Grafen på fig. 2 er absolut ikke eulersk. For nemheds skyld antages vægten af alle kanter

af typen (t_i, t_j) at være lig 0. De øvrige 4 kanter (t_j, s_i) har positive vægte, hvis størrelse ikke spiller nogen rolle i det efterfølgende. Alle vægte måles i minutter.

Postbudet skal uddele post under passage af alle 8 kanter i orienteringsretningen. Mellem knuderne s_i og t_j , $i, j = 1, 2, 3, 4$, findes imidlertid bekvemme skovstier, svarende til 16 orienterede kanter (s_i, t_j) , som ikke er vist på Fig. 2. For hver af disse fremgår varigheden i minutter af turen tilfods af følgende tabel:

		til			
		t_1	t_2	t_3	t_4
fra	s_1	11	10	12	12
	s_2	8	10	13	7
	s_3	9	14	5	8
	s_4	8	12	6	3

Chinese Postman: H ønskes udvidet til en eulergraf ved tilføjelse af kanter af typen (s_i, t_j) således at "spildtiden", dvs. den samlede tid til passage af skovstierne, bliver minimum.

- S9 (tekstspørgsmål):**
- 9.1** Hvilken problemtype er der her tale om? Løs ovenstående probleminstans til optimalitet.
- 9.2** Hvis 9.1 henviser til et LP problem findes et dertil hørende dualt problem. Løs dette for samme probleminstans og verificer at samme objektionsværdi opnås som i 9.1.

Grafen H i Fig. 2 har den egenskab at $|ind(v) - ud(v)| = 1$ for samtlige 8 knuder. Lad $H'' = (E'', V'')$ være en stærkt-sammenhængende, orienteret, vægtet graf, hvor alle vægte er endelige, positive tal, og hvor det for en delmængde af knuder gælder at $|ind(v) - ud(v)| > 1$.

Lad $CP(H'')$, være *Chinese Postman* med instansen H'' . $CP(H'')$ handler om at bestemme en orienteret kreds af minimum total vægt, som indeholder alle kanter *mindst 1 gang*.

Betragt følgende udsagn:

- a) $CP(H'')$ kan være ubegrænset (*unbounded*).
- b) Der findes en optimal løsning til $CP(H'')$.
- c) $\sum_{v \in V''} (ind(v) - ud(v)) = 0$
- d) Relevant problemtype: *Transportation Model*.
- e) $CP(H'')$ kan løses til optimalitet med simplex algoritmen.

S10: Hvormange af disse udsagn er korrekte,

- 10A) 2 10B) 3 10C) 4 10D) 5