Videregående algoritmik

Projektopgave 3

David Pisinger, Vinter 2004-05

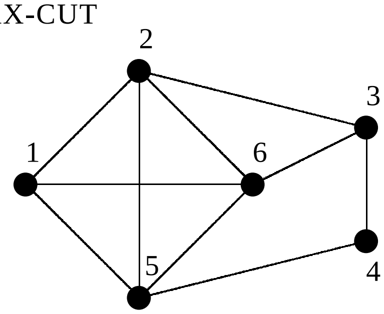
Dette er den tredie obligatoriske projektopgave på kurset “Videregående algorimik”. Opgaven stilles torsdag 16. december 2004 og skal afleveres senest torsdag 6. januar 2005 kl. 12.00 i DIKU’s førstedelsadministration. For at blive godkendt skal der være gjort et reelt forsøg på at løse samtlige spørgsmål. Besvarelsen skal udarbejdes i grupper på to til tre deltagere. Grupper med en deltager kræver accept fra instruktoren. Læs venligst hele opgaveformuleringen igennem inden du går i gang. Hints til opgaverne kan fås ved øvelserne, hvor der er afsat en øvelsesgang til at arbejde med projektopgaven.

MAX-CUT problemet

Givet en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ er MAX-CUT problemet defineret som

$$\text{MAX-CUT} = \{< G >: \text{ find et snit } S, T \text{ i grafen } G \text{ som maksimerer antal kanter over snittet}\}$$

F.eks. har følgende instans af MAX-CUT



den optimale løsning $S = \{2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ med løsningsværdi 8.

Opgave 1 Formuler det tilhørende afgørlighedsproblem MAX-CUT-DECISION. ■

Opgave 2 Opskriv en matematisk model for MAX-CUT-DECISION udtrykt ved de binære variable x_i, hvor $x_i = 1$ hvis knude $i \in S$, og $x_i = 0$ hvis knude $i \in T$. Lad endvidere $e_{ij} = 1$ hvis kant $(i, j) \in E$. ■

Det er velkendt at maximering af en objektfunktion f over domænet X givet som problemet

$$\max_{x \in X} f(x)$$

kan omskrives til et ækvivalent problem der minimerer objektfunktionen

$$\min_{x \in X} -f(x)$$

Opgave 3 Kan denne ækvivalens benyttes til at løse MAX-CUT ved hjælp af MIN-CUT (f.eks. ved at skifte fortegn på alle kantvægte)? Argumenter for dit svar. ■

Kvadratisk 0-1 programmering

Betragt det kvadratiske 0-1 optimeringsproblem QP:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}x_ix_j \\ \text{subject to} & x_j \in \{0,1\}, \quad j \in N \end{array} \tag{1}$$

defineret på mængden $N = \{1,\dots,n\}$, og med $d_{ij} \in \mathbb{R}$ for $i, j \in N$. Følgende eksempel viser en instans med $n = 4$ variable givet ved (d_{ij}) matricen

i \ j	1	2	3	4
1	-9	0	2	3
2	0	4	1	2
3	2	1	-7	1
4	3	2	1	0

Den optimale løsning er at vælge $x_2 = x_4 = 1$ hvilket giver en løsningsværdi på 8.

Opgave 4 Omformuler QP til et afgørlighedsproblem QP-DECISION. ■

Opgave 5 Vis at QP-DECISION ligger i klassen $\mathcal{NP}$. ■

Opgave 6 Vis at QP-DECISION er $\mathcal{NP}$-fuldstændig ved reduktion fra MAX-CUT-DECISION. Det er tilstrækkeligt at omskrive objektfunktionen ved reduktionen. ■

Nemme instanser af kvadratisk 0-1 programmering

Selv om QP-DECISION er $\mathcal{NP}$-fuldstændigt betyder det som bekendt ikke at alle instanser er svære at løse. Betragt følgende klasse af instanser for QP:

- $d_{ij} \in \mathbb{R}_0^+$ for alle $i, j \in N$, $i \neq j$
- $d_{ii} \in \mathbb{R}$ for alle $i \in N$

dvs. alle elementer udenfor diagonalen i matricen (d_{ij}) skal være ikke-negative.

Opgave 7 Vis at instanser af QP som overholder disse to krav kan løses i polynomiel tid.

a) Konstruer en instans (V, E, c) af MAXIMUM-FLOW ved at sætte $V = N \cup \{s,t\}$ og $E = \{s\} \times N \cup N \times N \cup N \times \{t\}$. Kapaciteten af kanterne sættes til:

$$\begin{array}{ll} c_{si} = \max\{0, \sum_{j\in N} d_{ij}\}, & i \in N \\ c_{ij} = d_{ij}, & i, j \in N, i \neq j \\ c_{ii} = 0, & i \in N \\ c_{it} = \max\{0, -\sum_{j\in N} d_{ij}\} & i \in N \end{array}$$

Argumenter for at dette er en gyldig instans af MAXIMUM-FLOW problemet.

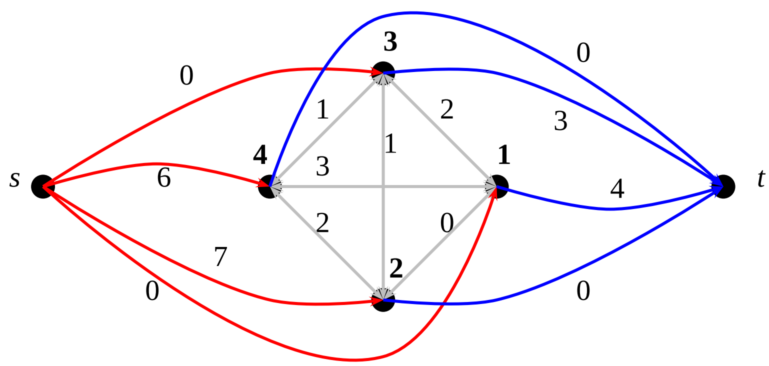
b) Antag at den optimale strømning f^* fundet med MAXIMUM-FLOW har strømningsværdien $|f^*|$, og at det tilhørende minimale snit er S, T. Lad $x_i = 1$ hvis $i \in S$ og lad $x_i = 0$ hvis $i \in T$. Opskriv værdien af et minimalt snit udtrykt ved disse beslutningsvariable.

c) Vis at $c_{si} - c_{it} = \sum_{j \in N} c_{ij} + d_{ii}$ for alle $i \in N$.

d) Vis at løsningsværdien til QP kan findes som $\sum_{i \in N} c_{si} - |f^*|$.

■

Et eksempel på ovenstående transformation med datasættet fra forrige side er:



Den maksimale strømningsværdi i grafen er $|f^*| = 5$, og det tilhørende snit er $S = \{s, 2, 4\}$ og $T = \{t, 1, 3\}$.

Opgave 8 Implementer en algoritme, som kan løse de ovenstående nemme instanser af QP problemet. Brug algoritmen til at løse instanserne på hjemmesiden. Rapporter den optimale løsningsværdi for hvert af problemerne. ■

Noter

Det kan i opgaven antages at MAX-CUT-DECISION er $\mathcal{NP}$-fuldstændig. $\mathcal{NP}$-fuldstændighed af MAX-CUT-DECISION bliver vist ved forelæsningerne som følger (se plancherne): 3CNF-SAT kan reduceres i polynomiel tid til 3CNF-NAE-SAT. Sidstnævnte problem kan igen reduceres i polynomiel tid til MAX-CUT-DECISION.

Til sidste opgave benyttes et rammeprogram skrevet i $C++$. Rammeprogrammet kan indlæse instanser fra hjemmesiden og rummer en simpel implementering af EDMONDS-KARP algoritmen til løsning af MAXIMUM-FLOW problemet. Rammeprogrammet findes på kursets hjemmeside sammen med alle instanser.

De benyttede datatilfælde er en blanding af virkelige data og tilfældigt genererede data som angivet i følgende tabel:

Beskrivelse	filnavne
Radiotelefoni	`tele7`
Compiler design	`comp30 comp45 comp47`
Geometrisk p-dispersion	`geo10 geo20 geo30 geo40`
Random 25% densitet	`rand10.25 rand20.25 rand30.25 rand40.25`
Random 100% densitet	`rand10.100 rand20.100 rand30.100 rand40.100`
Klike i en graf	`clique10 clique20 clique30 clique40`

Densiteten af et datatilfælde angiver hvor mange procent af d_{ij}'erne der er forskellige fra nul. Compiler design problemerne er foreslået af Helmberg, Rendl, Weismantel.