

Minimum-cost flow problemet

Videregående algoritmik 2006/07, Projekt opgave 1

Martin Zachariasen

24. november 2006

Dette er den første af to projektopgaver på kurset Videregående Algoritmik, blok 2, 2006/07. Opgaven skal løses i grupper på 2 eller 3 personer. Hvis en studerende ønsker at arbejde alene, forudsætter dette en forhåndsgodkendelse fra en instruktør.

Opgaven stilles fredag den 24. november 2006, og skal afleveres i Informationen (brevbakke på skranken) i 2 eksemplarer inden **tirsdag den 5. december 2006 kl. 10.30**. Husk at udfylde forsiden inden aflevering.

Besvarelsen skal godkendes for at gruppens medlemmer kan indstille sig til den skriftlige eksamen eller senere reeksaminationer. Der er ikke mulighed for genaflevering af en ikke godkendt besvarelse.

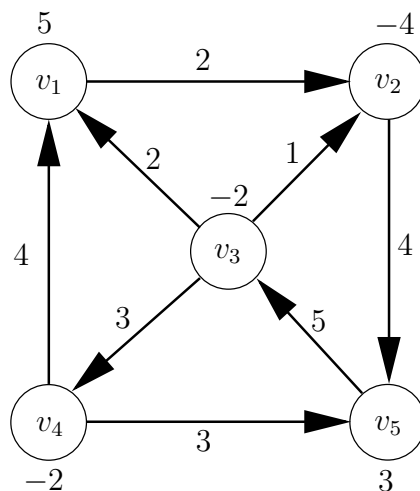
Opgave 1: b -strømning

Der er givet en orienteret graf $G = (V, E)$. For en knude $v \in V$ lader vi $\delta^+(v)$ betegne alle udgående kanter fra v , og $\delta^-(v)$ betegne alle indgående kanter til v . For hver kant $e \in E$ har vi en *kapacitet* $c_e \geq 0$, og for hver knude $v \in V$ et såkaldt *demand* b_v , som er et vilkårligt tal; der gælder dog at $\sum_{v \in V} b_v = 0$.

Vi ønsker nu at finde en b -strømning (eller b -flow), som er en tildeling af ikke-negative tal x_e til hver kant $e \in E$, således at

$$\begin{aligned} x_e &\leq c_e, \forall e \in E \\ \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e &= b_v, \forall v \in V \end{aligned}$$

Bemærk at vi her benytter såkaldte positive strømninger, hvor der i kapitel 26 i CLRS [1] også tillades negative strømninger langs en kant. Desuden følger det af ovenstående, at hvis $b_v > 0$ for en knude v , skal strømmingen ind i knuden v være præcis b_v større end strømmingen ud af knuden (og vice-versa hvis $b_v < 0$).



Figur 1: Graf med kapaciteter og demands (f.eks. $c_{(v_1, v_2)} = 2$ og $b_{v_1} = 5$).

- a) Giv et eksempel på en graf med kapaciteter og demands, hvor der *ikke* findes nogen b -strømning.
- b) Vi kan afgøre om der findes en b -strømning i en graf G (samt finde denne strømning) ved at løse et maximum-flow problem på en graf G' , der er udvidet i forhold til G . Argumenter detaljeret for hvordan dette kan gøres, og angiv køretiden af din algoritme.
- c) Find en b -strømning ved anvendelse af din algoritme på grafen i figur 1. Tegn den udvidede graf og en maksimal strømning i denne graf.

Opgave 2: Minimum-cost flow problemet

I minimum-cost flow (MCF) problemet har vi en graf G med kapaciteter og demands som i Opgave 1, og desuden har vi en vægt a_e for hver kant $e \in E$, som kan være et vilkårligt tal. Vi ønsker nu af finde en b -strømning i G med *minimal* total omkostning, hvor omkostningen af en kant $e \in E$ med strømning x_e er $a_e x_e$.

En LP-model for MCF problemet er følgende:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \sum_{e \in E} a_e x_e \\
 & \text{subject to} && x_e \leq c_e, \forall e \in E \\
 & && \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = b_v, \forall v \in V \\
 & && x_e \geq 0, \forall e \in E
 \end{aligned}$$

- a) Opskriv LP-formuleringen for problemet i figur 1, hvor vægtene er givet som følger: $a_{(v_1, v_2)} = 1$, $a_{(v_2, v_5)} = 2$, $a_{(v_3, v_1)} = 3$, $a_{(v_3, v_2)} = 4$, $a_{(v_3, v_4)} = 5$, $a_{(v_4, v_1)} = 4$, $a_{(v_4, v_5)} = 4$, $a_{(v_5, v_3)} = 5$.
- b) Angiv en simpel måde hvorpå man kan løse et vilkårligt maximum-flow problem ved anvendelse af en algoritme til minimum-cost flow problemet. Argumenter detaljeret for korrektheden af transformationen.

Opgave 3: Dualitet i MCF problemet

Formålet med denne delopgave er detaljeret at vise, at det duale problem til LP-formuleringen for MCF er følgende:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \sum_{v \in V} b_v y_v - \sum_{e \in E} c_e z_e \\
 & \text{subject to} && -y_u + y_v - z_e \leq a_e, \forall e = (u, v) \in E \\
 & && z_e \geq 0, \forall e \in E
 \end{aligned}$$

Bemærk at de duale variable y_v i formuleringen godt kan være negative.

- a) Opskriv den primale LP formulering for MCF problemet i standard form. Kald denne formulering for LP1.
- b) Opskriv det duale problem til LP1. Kald denne formulering for DP1.
- c) Argumenter detaljeret for, at DP1 er ækvivalent med formuleringen af det duale problem, som er angivet ovenfor.

Opgave 4: Reducerede omkostninger

For en given lovlig dual løsning (y, z) , definerer vi den *reducerede omkostning* for en kant $e = (u, v) \in E$ som

$$\bar{a}_e = a_e + y_u - y_v$$

- Antag at vi kun kender y -vektoren for en given dual løsning (y, z) . Vis at vi kan tillade os at sætte $z_e = \max(0, -\bar{a}_e)$. (Hint: Vis at dette valg er lovligt og giver den bedst mulige værdi for objektfunktionen for det givne valg af y .)
- Benyt complementary slackness (fra opgave 29-2 i CLRS) til at vise, at en løsning x til MCF problemet er *optimal* hvis og kun hvis der findes en y -vektor hvor der for hver kant $e \in E$ gælder at

$$\bar{a}_e < 0 \implies x_e = c_e$$

$$\bar{a}_e > 0 \implies x_e = 0$$

Opgave 5: Residualgraf og negative kredse

For en given b -strømning x defineres residualgrafen $G_x = (V_x, E_x)$ som følger: Knudemængden er den samme som for G , dvs. $V_x = V$. For hver kant $e = (u, v) \in E$ hvor $x_e < c_e$ har vi en kant $(u, v) \in E_x$ med vægten a_e . For hver kant $e = (u, v) \in E$ hvor $x_e > 0$ har vi en kant $(v, u) \in E_x$ med vægten $-a_e$. En kreds i G_x , hvor summen af kantvægtene er negativ, kaldes en *negativ kreds*.

- Angiv residualgrafen for grafen i figur 1 med kantvægtene fra Opgave 2 for følgende b -strømning x : $x_{(v_1, v_2)} = 0$, $x_{(v_2, v_5)} = 4$, $x_{(v_3, v_1)} = 2$, $x_{(v_3, v_2)} = 0$, $x_{(v_3, v_4)} = 3$, $x_{(v_4, v_1)} = 3$, $x_{(v_4, v_5)} = 2$, $x_{(v_5, v_3)} = 3$.
- Argumenter generelt for at hvis der findes en negativ kreds i G_x , så er b -strømningen x ikke optimal. Hvordan kan man effektivt finde en negativ kreds i G_x og hvad er algoritmens køretid?
- Argumenter for at hvis der *ikke* findes en negativ kreds i G_x , så er x optimal. (Hint: Angiv hvordan en lovlig dual løsning y , som opfylder optimalitetsbetingelserne fra Opgave 4, kan findes.)

Litteratur

- [1] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein: Introduction to Algorithms (2nd ed.), MIT Press, 2001.