

# DATV: Introduktion til optimering og operationsanalyse

## Multicommodity Flow Problem

David Pisinger, *Projekt opgave 2*, blok 2, DIKU, 2005-06

Dette er den anden obligatoriske projektopgave på kurset "DATV: Introduktion til optimering og operationsanalyse". Opgaven stilles tirsdag 13. december 2005 og skal afleveres senest tirsdag 10. januar 2006 kl. 12.00 i DIKU's førstedelsadministration. For at blive godkendt skal der være gjort et reelt forsøg på at løse samtlige spørgsmål. Besvarelsen skal udarbejdes i grupper på to til tre deltagere. Grupper med én deltager kræver accept fra instruktoren. Læs venligst hele opgaveformuleringen igennem inden du går i gang. Hints til opgaverne kan fås ved øvelserne, hvor der er afsat tid til at arbejde med projektopgaven.

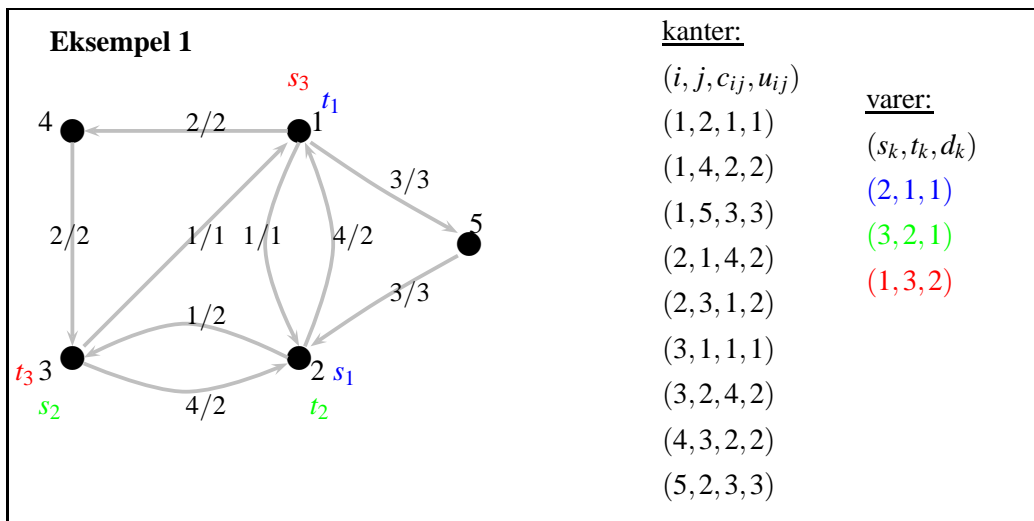
### Indledning

Multicommodity flow problemet er en generalisering af strømningproblemer til den situation hvor flere varer (*commodities*) deles om netværket. Multicommodity flow problemet er blevet brugt til at modellere og løse adskillige optimeringsproblemer, heriblandt godstransport på et jernbanenet, kommunikation via et kabelnet og olietankerplanlægning [2].

I denne opgave vil vi betragte svage og stærke formuleringer af Minimum cost multicommodity flow problemet, samt diskutere deres fordele og ulemper.

Lad der være givet en vægtet orienteret graf  $G = (V, E, c, u)$  hvor hver kant  $(i, j) \in E$  har en tilhørende omkostning  $c_{ij}$  og en kapacitet  $u_{ij}$ . Endvidere er der givet et antal varer (commodities)  $K = \{1, \dots, m\}$  som hver er givet ved triplen  $(s_k, t_k, d_k)$ . Her angiver  $s_k$  hvorfra vare  $k$  skal sendes,  $t_k$  angiver destinationen for vare  $k$ , og  $d_k$  angiver hvor mange enheder der skal sendes.

Vi benytter beslutningsvariablen  $x_{ij}^k$  til at angive om vare  $k \in K$  strømmer langs kanten  $(i, j) \in E$ .



**Opgave 1** Løs ovenstående multicommodity flow problem i hånden, idet det antages at strømningerne på kanterne godt må være fraktionelle. (f.eks. hvis varerne er mel, sukker, olie e.l. således at den givne last kan deles vilkårligt). ■

Vi kan formulere multicommodity flow problemet som et LP-problem. Lad variablen  $x_{ij}^k$  angive om vare  $k$  strømmer langs kant  $(i, j)$ . Den første begrænsning (2) sikrer flow bevarelse. Den næste begrænsning (3) sikrer for hvert  $k$  at varen strømmer ud fra  $s_k$ . Den følgende begrænsning (4) sikrer for hvert  $k$  at varen strømmer ind til  $t_k$ . Endelig skal kapaciteten af hver kant respekteres i (5). Begrænsning (6) tillader at varer deles. Vi vil kalde denne formulering den *simple formulering*.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} d_k x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (5)$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \quad (6)$$

**Opgave 2** Formuler eksempel 1 som et LP-problem og løs det til optimalitet ved brug af CPLEX. Vedlæg modellen og uddata. ■

I resten af denne opgave antager vi at alle strømninger skal være *udelelige*, dvs. for hver vare  $k \in K$  skal de  $d_k$  enheder følge samme rute. Denne version af multicommodity flow problemet er  $\mathcal{NP}$ -hård, som vist af [1].

**Opgave 3** Løs eksempel 1 til optimalitet, hvis alle varer skal transporteres udelt. ■

**Opgave 4** Opskriv for hver vare  $k$  i eksempel 1, samtlige mulige ruter fra  $s_k$  til  $t_k$  gennem grafen  $G = (V, E, c)$ . En rute må kun benytte kanter hvori der kan strømme mindst  $d_k$  enheder, og den skal være simpel (dvs. kredsfri). Angiv for hver rute dens tilhørende pris for at sende  $d_k$  enheder. ■

Lad  $R_k$  betegne mængden af mulige ruter fra  $s_k$  til  $t_k$  hvor der kan strømme  $d_k$  enheder. Lad endvidere  $a_{r,ij}^k$  angive om rute  $r$  for vare  $k$  benytter kant  $(i, j)$ , og lad  $\hat{c}_r^k$  angive prisen for rute  $r \in R_k$ . Vi kan benytte dette til at opskrive en alternativ formulering af multicommodity flow problemet, som vi betegner *path formuleringen*. Lad  $x_r^k$  for hver rute  $r \in R_k$  angive om ruten benyttes for vare  $k$ . Dermed bliver modellen:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} \hat{c}_r^k x_r^k \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} d_k a_{r,ij}^k x_r^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (8)$$

$$\sum_{r \in R_k} x_r^k \geq 1 \quad k \in K \quad (9)$$

$$x_r^k \in \{0, 1\} \quad k \in K, r \in R_k \quad (10)$$



**Opgave 9** Giv en intuitiv fortolkning af de duale variable  $y_{ij}$  og  $\bar{y}_k$ . ■

**Opgave 10** Idet den intuitive fortolkning af de duale variable udnyttes, udregn en ny pris for hver rute fra opgave 4 som tager hensyn til de duale variable. (Hint: betragt de reducerede omkostninger af hver rute). Udvælg den mest lovende rute  $r \in R_1 \cup \dots \cup R_m$ , som skal tilføjes modellen (11). ■

**Opgave 11** Udvid ovenstående path formulering (11) med den nye rute. Løs problemet til LP-optimalitet med CPLEX og find de nye duale variable. ■

**Opgave 12** Formuler et stopkriterie for hvor længe man skal generere ruter. ■

**Opgave 13** Gentag processen med at tilføje den mest lovende rute til modellen indtil stop-kriteriet mødes. Angiv den fundne løsningsværdi når processen standser. Diskuter hvor mange ruter det blev nødvendigt at tilføje til modellen. ■

## Noter

Til opgaven benyttes CPLEX. Da der kun er nogle få CPLEX-licenser til rådighed på DIKU bedes man logge ud fra CPLEX relativt hurtigt efter at have kørt sin instans. CPLEX licenser er tilgængelige på LINUX pc'erne bach-X og kand-X.

Pisa Universitet har samlet adskillige instanser af Multi-commodity flow problemet [4]. En god introduktion til Multicommodity flow problemer findes i [2] samt [3].

## Litteratur

- [1] Viggo Khan, "Maximum Integral k-multicommodity flow on trees"  
<http://www.nada.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node121.html>
- [2] A.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin, "Network Flows – Theory, Algorithms, and Applications", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [3] Alexander Schrijver, "Advanced Graph Theory and Combinatorial Optimization" (2001)  
<http://homepages.cwi.nl/~lex/files/agtco.ps>
- [4] Dept. of Computer Science, University of Pisa, "Multicommodity flow instances"  
<http://www.di.unipi.it/di/groups/optimize/Data/MMCF.html>
- [5] L. A. Wolsey, "Integer Programming", Wiley, Chichester, UK, 1999.