

Introduktion til Optimering

David Pisinger, DIKU

Eksamen, 27 januar 2006

Gomory Snit

Betragt følgende optimeringsproblem

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 - 2x_2 \\ & \text{subject to} && -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & && x_1 + x_2 \leq 4 \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Ved tilføjelse af slack variable $s_1, s_2 \geq 0$ for de to begrænsninger, og løsning af LP-relaxeringen af problemet med Simplex algoritmen, fremkommer følgende to ligninger

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{10}s_2 &= \frac{25}{10} \\ x_1 - \frac{1}{10}s_1 + \frac{6}{10}s_2 &= \frac{15}{10} \end{aligned}$$

Udled et Gomory snit fra den første Simplex ligning hvori basisvariablen antager en fraktionel værdi.

S 11: Hvilken ulighed fremkommer efter eliminering af slack variablene?

11A) $x_2 \leq 2$

11D) $-3x_1 + 5x_2 \leq 7$

11B) $x_1 \leq 3$

11E) $-x_1 + x_2 \leq 1$

11C) $x_2 \leq \frac{5}{2}$

11F) $-3x_1 + 5x_2 \leq 5$

Cover uligheder

Lad

$$K = \text{conv}(\{x \in \mathbb{B}^7 \mid 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 \leq 15\})$$

Lad endvidere

$$H = \{x \in \mathbb{B}^7 \mid x_6 = x_7 = 1\}$$

S 12: Hvad er dimensionen $\dim(K \cap H)$?

12A) $\dim(K \cap H) = 0$

12D) $\dim(K \cap H) = 3$

12B) $\dim(K \cap H) = 1$

12E) $\dim(K \cap H) = 4$

12C) $\dim(K \cap H) = 2$

12F) $\dim(K \cap H) = 5$

Et minimalt cover for uligheden i K er $C = \{1, 2, 3\}$, der giver ophav til cover uligheden $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$. Vi vil gerne løfte denne ulighed til en lovlig ulighed på formen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 + \beta x_5 \leq 2$$

S 13: Hvis vi først finder den største værdi af α og derefter den største værdi af β hvilke værdier finder vi

13A) $\alpha = 0, \beta = 0$

13D) $\alpha = 1, \beta = 1$

13B) $\alpha = 0, \beta = 1$

13E) $\alpha = 1, \beta = 2$

13C) $\alpha = 1, \beta = 0$

13F) $\alpha = 2, \beta = 1$

Kolonnegenerering

Betragt følgende *minimum cost multicommodity flow problem*, defineret på en vægтет orienteret graf $G = (V, E, c, u)$ hvor hver kant $(i, j) \in E$ har en tilhørende omkostning c_{ij} og en kapacitet u_{ij} . Endvidere er der givet et antal varer (commodities) $K = \{1, \dots, m\}$ som hver er givet ved triplen (s_k, t_k, d_k) . Her angiver s_k hvorfra vare k skal sendes, t_k angiver destinationen for vare k , og d_k angiver hvor mange enheder der skal sendes. Vi søger den samlet set billigste strømning.

Beslutningsvariablen x_{ij}^k angiver om vare $k \in K$ strømmer langs kanten $(i, j) \in E$. Dermed kan problemet formuleres:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} d_k x_{ij}^k \tag{1}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in V} x_{ij}^k - \sum_{i \in V} x_{ji}^k = 0 \quad k \in K, j \in V \setminus \{s_k, t_k\} \tag{2}$$

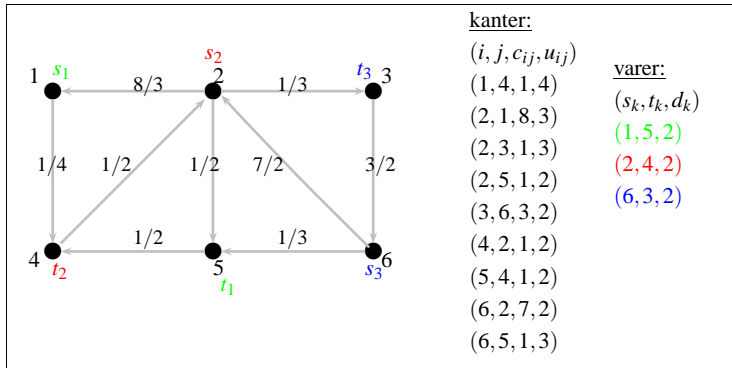
$$\sum_{j \in V} x_{s_k, j}^k = 1 \quad k \in K \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, t_k}^k = 1 \quad k \in K \tag{4}$$

$$\sum_{k \in K} d_k x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \tag{5}$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1 \quad k \in K, (i, j) \in E \tag{6}$$

S 14: Løs følgende instans af multicommodity flow problemet i hånden, idet det antages at strømningerne på kanterne godt må være fraktionelle.



Hvad er prisen z af den samlet set billigste strømning?

- 14A) $z = 32$
- 14B) $z = 34$
- 14C) $z = 36$
- 14D) $z = 33$
- 14E) $z = 35$
- 14F) $z = 37$

S 15: Lad for hver vare k mængden R_k betegne samtlige simple ruter fra s_k til t_k gennem grafen $G = (V, E, c)$. Hvilken af følgende ruter tilhører ikke $R_1 \cup R_2 \cup R_3$:

- 15A) 1→4→2→3→6→5 pris 14
- 15B) 1→4→2→5 pris 6
- 15C) 2→1→4 pris 18
- 15D) 2→3→6→5→4 pris 12
- 15E) 2→5→4 pris 4
- 15F) 6→2→3 pris 16
- 15G) 6→5→4→2→3 pris 8
- 15H) 6→2→5→4→2→3 pris 22

Vi vil benytte en *path formulering* af multicommodity flow problemet, idet det fortsat tillades at strømningen langs kanterne er *fraktionel*. Lad $a_{r,ij}^k$ angive om rute $r \in R_k$ benytter kant (i, j) , og lad \hat{c}_r^k angive prisen for rute $r \in R_k$. Lad x_r^k for hver rute $r \in R_k$ angive om ruten benyttes for vare k . Dermed bliver modellen:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} \hat{c}_r^k x_r^k \tag{7}$$

$$\text{s.t. } \sum_{k \in K} \sum_{r \in R_k} d_k a_{r,ij}^k x_r^k \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \tag{8}$$

$$\sum_{r \in R_k} x_r^k \geq 1 \quad k \in K \tag{9}$$

$$0 \leq x_r^k \leq 1 \quad k \in K, r \in R_k \tag{10}$$

Her sikrer (8) at kapaciteten af hver kant bliver respekteret, mens (9) sikrer at den fornødne mængde varer sendes fra s_k til t_k . Endelig sikrer (10) at alle varer bliver sendt udelt ad samme rute. Vi vil løse problemet med forsinket kolonnegenerering. På et tidspunkt i kolonnegenereringen har vi et begrænset master problem med følgende fem ruter

vare k	rute	pris
1	1→4→2→5	6
2	2→1→4	18
2	2→5→4	4
3	6→2→3	16
3	6→5→4→2→3	8

Dette fører til følgende LP-model svarende til begrænsningerne (7) - (10):

$$\begin{array}{llll}
 \min & 6x_1^1 + 18x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_1^3 + 8x_2^3 & & \\
 \text{s.t.} & 2x_1^1 + 2x_1^2 & \leq 4 & (1,4) \\
 & 2x_1^2 & \leq 3 & (2,1) \\
 & 2x_1^3 + 2x_2^3 & \leq 3 & (2,3) \\
 & 2x_1^1 + 2x_2^2 & \leq 2 & (2,5) \\
 & & \leq 2 & (3,6) \\
 & 2x_1^1 & + 2x_2^3 & \leq 2 & (4,2) \\
 & & 2x_2^2 + 2x_2^3 & \leq 2 & (5,4) \\
 & & 2x_1^3 & \leq 2 & (6,2) \\
 & & 2x_2^3 & \leq 3 & (6,5) \\
 & x_1^1 & & \geq 1 & \\
 & x_1^2 + x_2^2 & & \geq 1 & \\
 & & x_1^3 + x_2^3 & \geq 1 & \\
 & 0 \leq x_1^1, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3 \leq 1 & & &
 \end{array} \quad (11)$$

Lad y_{ij} betegne den duale variabel svarende til begrænsning (8) for kant (i, j) , og lad \bar{y}_k betegne den duale variabel svarende til begrænsning (9) for vare k . De duale variable for ovenstående model (11) er $y_{25} = -7$, $y_{42} = -4$ og øvrige $y_{ij} = 0$, mens $\bar{y}_1 = 28$, $\bar{y}_2 = 18$, $\bar{y}_3 = 16$.

S 16: Hvad er den reducerede omkostning af ruten $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$

- | | |
|---------|----------|
| 16A) 0 | 16D) -6 |
| 16B) -2 | 16E) -8 |
| 16C) -4 | 16F) -10 |

Vi vælger at tilføje ruten $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ til modellen (11). Efter at have løst problemet til LP-optimalitet, finder vi de duale variable $y_{23} = -3$, $y_{25} = -7$, $y_{42} = -4$ og øvrige $y_{ij} = 0$, mens $\bar{y}_1 = 28$, $\bar{y}_2 = 18$, $\bar{y}_3 = 22$.

S 17: Hvilken *simpel* rute har negativ reducerede omkostning

- | | |
|--|--|
| 17A) $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ | 17E) $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ |
| 17B) $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ | 17F) $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ |
| 17C) $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ | 17G) $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ |
| 17D) $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ | 17H) $6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ |
| 17I) ingen simpel rute har negativ reduceret omkostning | |

S 18: Betragt igen formuleringen (1) til (6). Hvis vi Lagrange relaxerer begrænsning (5), hvilken objektfunktion fremkommer så

$$18A) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}, \text{ hvor } \lambda_{ij} \geq 0$$

$$18B) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}, \text{ hvor } \lambda_{ij} \leq 0$$

$$18C) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in E} u_{ij} \lambda_{ij}, \text{ hvor } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$18D) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k, \text{ hvor } \lambda_{ij} \geq 0$$

$$18E) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k, \text{ hvor } \lambda_{ij} \leq 0$$

$$18F) \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - \lambda_{ij}) d_k x_{ij}^k, \text{ hvor } \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$$

Hint: Husk at vi betragter et minimeringsproblem, når domænet af λ_{ij} bestemmes.

S 19: (tekst spørgsmål)

- Vis at værdien af den fundne LP-løsning for de to formuleringer (simpel formulering og path formulering) er den samme for den betragtede instans i spørgsmål S 14.
- Hvad er det optimale valg af Lagrange multiplikatorer (λ_{ij}) for den betragtede instans i spørgsmål S 14, når vi Lagrange relaxerer begrænsning (5) i formuleringen (1) til (6).

Network design

Betragt igen minimum cost multicommodity flow problemet givet ved (1) til (6). Antag at vi *både* skal bygge netværket *og* samtidig finde den samlet set billigste strømning. Det koster $f_{ij} \geq 0$ at etablere en kant $(i, j) \in E$, og der kan kun strømme noget gennem en kant hvis den er etableret. Lad beslutningsvariablen $y_{ij} \in \{0, 1\}$ angive om kanten er blevet etableret.

S 20: (tekst spørgsmål)

Formuler en MIP-model som kan bruges til at løse det kombinerede problem.