

## Answers, Written Exam, January 2005, David Pisinger

**S11:** Fra ligningen

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2}s_2 = \frac{3}{2}$$

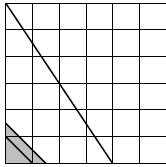
fås Gomory uligheden

$$\frac{1}{2}s_2 \geq \frac{1}{2}$$

Ved indsættelse af  $s_2 = 3 - 2x_1 - 2x_2$  fås

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

Det korrekte svar er 11.b).



**S12:** Det korrekte svar er 12.f).

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Lad  $P_1 = \{1, 2\}$  bestå af første og anden række. Lad  $P_2 = \{3, 4, 5\}$  bestå af tredje, fjerde og femte række. Så ses det let at  $A_6$  overholder "property P".

**S13:** Uligheden  $x_1 + x_3 + x_5 \leq 2$  er ikke en *minimal cover* ulighed, da også  $x_3 + x_5 \leq 1$  er en cover ulighed. Så det rigtige svar er 13.d).

**S14:** Vi har den minimale cover ulighed

$$x_2 + x_5 \leq 1$$

For at finde den største værdi af  $\alpha$  således at uligheden

$$\alpha x_1 + x_2 + x_5 \leq 1$$

er lovlig, løser vi problemet:

$$\begin{aligned} \gamma = \text{maximize } & x_2 + x_5 \\ \text{subject to } & 12 + 8x_2 + 8x_5 \leq 15 \\ & x_2, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

med optimal løsning  $\gamma = 0$ . Så  $\alpha = 1 - \gamma = 1$ , og dermed er 14 b) korrekt.

**S15:** Siden  $A$  er totalt unimodulær, definerer begrænsningerne  $Ax \geq b$  det konvekse hylster, og dermed ved vi at  $z_{LD} = z_{LP}$ . Da vi ikke ved om  $Dx \leq d$  definerer det konvekse hylster, kan der findes instanser hvor den nedre grænseverdi  $z_{LD}$  og  $z_{LP}$  er skarpt mindre end  $z_{IP}$ . Så det korrekte svar er 15.d).

**S16:** Det korrekte svar er

$$\begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^m x_k \\ \text{s.t. } \sum_{k=1}^m a_{ik}x_k \geq 1 \quad i = 1, \dots, n \\ x_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, \dots, m \end{array}$$

Så 16.a) er korrekt.

**S17:** Bemanding  $k = 9$  som indeholder personerne  $\{1, 3, 4\}$  er ikke lovlig da deres samlede vægt-sum er  $3 + 5 + 7 = 15$ . Det rigtige svar er 17.e).

**S18:** Alle bemandinger har ikke-negativ reduceret omkostning som det ses i følgende tabel:

$k$	$j$	1	2	3	4	$1 - \sum_{j=1}^n a_{jk}y_j$
1	1	0	0	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2	0	1	0	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
3	0	0	1	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4	0	0	0	1	1	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
5	1	1	0	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
6	1	0	1	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
7	1	0	0	1	1	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
8	1	1	1	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
10	0	1	1	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
11	0	1	0	1	1	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
12	0	0	1	1	1	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

så forsinket kolonnegenererings proceduren vil terminere. Svar 18.h) er rigtigt.

**S19:** Hvis man anvender multiplikatorer  $\lambda_j \geq 0$  bliver det Lagrange relaxerede problem

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j (\sum_{i=1}^n x_{ij} - 1) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq Lu_i \quad i = 1, \dots, n \\ u_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \end{array}$$

der kan omskrives til

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n (u_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq Lu_i \quad i = 1, \dots, n \\ u_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \end{array}$$

der igen kan spaltes op i  $n$  identiske problemer på formen:

$$\begin{aligned} \min \quad & u_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq Lu_i \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Det optimale valg af Lagrange multiplikatorer svarer til de duale variable i master problemet. Da kolonnegenereringsprocessen er termineret, kan vi derfor vælge  $\lambda_1 = y_1$ ,  $\lambda_2 = y_2$ ,  $\lambda_3 = y_3$ ,  $\lambda_4 = y_4$ . Det ses nu at ovenstående problem har løsningsværdien 0 ved at gennemløbe samtlige lovlige bemandinger af båden. Dermed bliver den optimale løsningsværdi

$$\min \sum_{i=1}^n (u_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}) + \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 + \frac{5}{3}$$

**S20:** Lad  $\delta^1$  angive antal gratis flasker fra forhandler 1. Lad  $\delta^2$  angive om der opnås rabat hos forhandler 2.

Da kan objektfunktionen skrives som

$$\min c_A^1 (x_A^1 - \delta^1) + c_B^1 x_B^1 + c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 - 300\delta^2$$

Vi skal opfylde behovene for vin

$$\begin{aligned} x_A^1 + x_A^2 &\geq b_A \\ x_B^1 + x_B^2 &\geq b_B \end{aligned}$$

Antal gratis flasker fra forhandler 1 er givet ved uligheden

$$x_A^1 \geq 6\delta^1, \quad \delta^1 \in \mathbb{Z}_+$$

Rabat hos forhandler 2 er styret af

$$c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 \geq 2000 \Leftrightarrow \delta^2 = 1 \quad \delta^2 \in \{0, 1\}$$

Sidstnævnte implikation kan nemt lineariseres til

$$c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 - 2000\delta^2 \geq 0$$