Videregående algoritmik

Job-schedulering

David Pisinger, *Projektopgave 2*, blok 2, DIKU, 2005-06

Skitse til løsning

Dette er ikke en komplet besvarelse, men snarere forslag til hvorledes opgaverne kan gribes an.

Svar 1 En mulig løsning er givet som:

job	maskine	start	slut
1	1	7	9
2	1	2	6
3	2	2	7
3	1	10	13
4	2	8	14

sluttiden er iberegnet i proces tiden. ■

Svar 2 Lad J være mængden af job, $M' = \{1,\dots,M\}$ mængden af maskiner, og $T' = \{\min r_j,\dots,\max d_j\}$ mængden af tider. Lad x_{jmt} være en binær variabel som angiver om job j benytter maskine m i tiden t, for $j \in J, m \in M', t \in T'$ Dermed kan problemet formuleres som:

$$\text{SCHED} = \left\{ \begin{array}{ll} \langle J,(p_j),(r_j),(d_j),M\rangle : & \\ \text{der findes en schedulering } x_{jmt} \text{ så} & \\ \sum_{j\in J} x_{jmt} \le 1, & m \in M', t \in T' \\ \sum_{m\in M} x_{jmt} \le 1, & j \in J, t \in T' \\ x_{jmt} = 0, & t < r_j, j \in J, m \in M' \\ x_{jmt} = 0, & t \ge d_j, j \in J, m \in M' \\ \sum_{m\in M}\sum_{t\in T'} x_{jmt} = p_j, & j \in J \\ x_{jmt} \in \{0,1\}, & j \in J, m \in M', t \in T' \end{array} \right\}$$

Den første begrænsning sikrer at for enhver maskine og ethvert tidspunkt må kun eet job udføres på maskinen. Den anden begrænsning sikrer at for ethvert job og ethvert tidspunkt må jobbet kun være på een maskine. Tredie begrænsning sikrer at job j ikke starter før sin release tid r_j, mens fjerde begræsning sikrer at job j ikke udføres efter sin due date d_j. Femte begrænsning sikrer at den nødvendige procestid bliver afsat til hvert job.

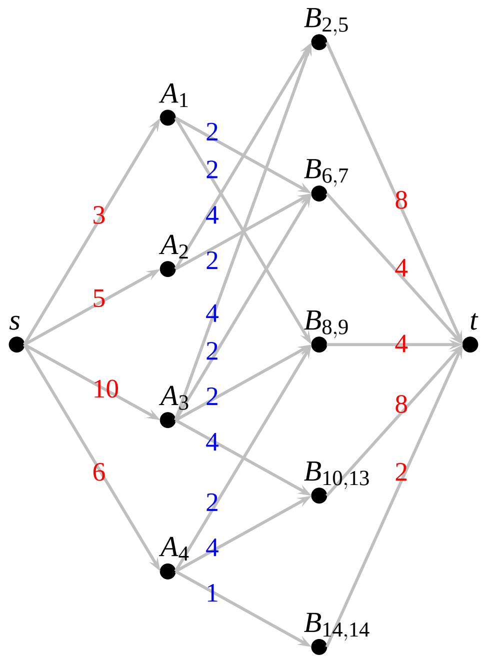
Ovenstående kan også forklares i ord. Det væsentlige er at alle begrænsninger er opskrevet formelt. ■

Svar 3 Antag at SCHED har en lovlig løsning. Lad (x_{jmt}) være den tilhørende løsningsvektor. Lad strømmen langs kanten $e = (A_j, B_{a,b})$ være

$$f_e = \sum_{t\in a,\dots,b} x_{jmt}$$

Lad endvidere strømmen langs kanten $e = (s, A_j)$ være

$$f_e = \sum_{e'=(A_j,B_{a,b})} f_{e'}$$



Figur 1: Transformation af SCHED til en instans af MAXIMUM-FLOW

Lad endelig strømmen langs kanten $e = (B_{a,b}, t)$ være

$$f_e = \sum_{e'=(A_j, B_{a,b})} f_{e'}$$

Dermed ses det let at flowbevarelse er opfyldt, og at kapaciteten af kanterne er overholdt. Samtidig vil strømmen i MAX-FLOW netværket være $\sum_{j \in J} p_j$.

Antag omvendt at MAXIMUM-FLOW har en lovlig løsning. For hver knude B_{ab} betragt alle kanter (A_j, B_{ab}) som går ind i knuden. Da strømmen ud fra knuden højst er $M(b-a+1)$, betyder det omvendt at strømmen ind i knuden også højst er $M(b-a+1)$. For hver kant (A_j, B_{ab}) med strøm f sætter vi beslutningsvariablene i SCHED til $x_{jmt} = 1$ for lige så mange tidsintervaller som giver ved f. Da der er "nok" maskintid i tidsintervallet $a, \ldots, b$ til de afsatte job er problemet alene at undgå at et job bliver behandlet på to maskiner samtidigt. Dette undgås let ved at fordele tiden til maskinerne, således at al tid er afsat på maskine m før vi afsætter tiden på maskine $m+1$. Det kontrolleres let at den fundne løsning er lovlig for SCHED (overvej). ■

Svar 4 Afgørlighedsproblemet SCHED-NOP har ingen lovlig løsning. ■

Svar 5

$$\text{SCHED-NOP} = \left\{ \begin{array}{ll} \langle J, (p_j), (r_j), (d_j), M \rangle : & \\ \text{der findes en schedulering } x_{jmt} \text{ så} & \\ \sum_{j \in J} x_{jmt} \leq 1, & m \in M', t \in T' \\ \sum_{m \in M} x_{jmt} \leq 1, & j \in J, t \in T' \\ x_{jmt} = 0, & t < r_j, j \in J, m \in M' \\ x_{jmt} = 0, & t \geq d_j, j \in J, m \in M' \\ \sum_{m \in M} \sum_{t \in T'} x_{jmt} = p_j, & j \in J \\ \text{der findes ikke } t_1 < t_2 < t_3 \text{ så } x_{jmt_1} = 1, x_{jmt_2} = 0, x_{jmt_3} = 1 & \\ \text{der findes ikke } m_1 < m_2 \text{ og } t_1, t_2 \text{ så } x_{jm_1t_1} = 1, x_{jm_2t_2} = 1 & \\ x_{jmt} \in \{0, 1\}, & j \in J, m \in M', t \in T' \end{array} \right\}$$

Den første begrænsning sikrer at for enhver maskine og ethvert tidspunkt må kun eet job udføres på maskinen. Den anden begrænsning sikrer at for ethvert job og ethvert tidspunkt må jobbet kun være på een maskine.

Tredie begrænsning sikrer at job j ikke starter før sin release tid r_j, mens fjerde begræsning sikrer at job j ikke udføres efter sin due date d_j. Femte begrænsning sikrer at alle job får den fornødne procestid. Endelig sikrer begrænsning seks at et job ikke må blive afbrudt, mens begrænsning syv sikrer at et job ikke må blive udført på to forskellige maskiner.

En løsning kan kontrolleres i polynomiel tid ved at kontrollere hver af begrænsningerne. ■

Svar 6 TWO-PARTITION er defineret som følgende afgørlighedsproblem: Givet et antal ikke-negative heltal $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Afgør om der findes en opdeling af af S i to mængder, T og $S \setminus T$, således at $\sum_{i \in T} s_i = \sum_{i \in S \setminus T} s_i$.

Lad hvert heltal s_j svare til et job j, og lad dets proces tid være $p_j = s_j$. Lad der være $M = 2$ job. Alle release times sættes til $r_j = 0$, og alle due dates sættes til $d_j = \sum_{j=1}^{n} s_j / 2$.

Der er nu en 1-til-1 korrespondance mellem et job på maskine 1 og mængden T og job på maskine 2 og mængden $S \setminus T$.

Der er en løsning til TWO-PARTITION hvis og kun hvis der er en løsning til SCHED-NOP. (overvej)

Reduktionen kører i polynomiel tid (kontroller). ■

Svar 7 En øvre grænseværdi for MAX-SCHED-NOP kan findes ved at relaxere begrænsningen om at job skal behandles udelt. Dermed får man en instans af MAX-SCHED.

Grænseværdien er lovlig, idet de to problemer har samme objektfunktion (overvej), og enhver løsning til MAX-SCHED-NOP er også en løsning til MAX-SCHED. ■

Svar 8 Vi skal først transformere MAX-SCHED til en instans af MAXIMUM-FLOW. Denne vil have $|J|$ knuder af typen A_j og højst $2|J|$ knuder af typen B_{ab}. Så der er højst $V = 3|J| + 2$ knuder.

Antallet af kanter er højst $|J|$ kanter af typen (s, A_j) og højst $2|J|$ kanter af typen (B_{ab}, t). Endvidere er der højst $|J| \times 2|J|$ kanter af typen (A_j, B_{ab}). Så i alt har vi $E = 2|J|^2 + 3|J|$ kanter.

Dette indsættes i køretiden for en god MAXIMUM-FLOW algoritme. Benytter vi Edmonds-Karp med køretid $O(E^2V)$ fås den samlede køretid

$$O(E^2V) = O((|J|^2)^2|J|) = O(|J|^5)$$

■

Svar 9 Ved at bruge relaxeringen til MAX-SCHED finder vi grænseværdien $\sum_{j \in J} p_j = 3 + 5 + 10 + 6 = 24$. ■

Svar 10 Man kan f.eks. forgrene på at et job tildeles en starttid s_j på en given maskine. Da jobbet skal udføres udelt, vil sluttiden af jobbet være defineret. Vi skal sikre at starttiden s_j for et job ikke er tidligere end r_j og der skal gælde at $s_j + p_j < d_j$. Vi skal endvidere sikre at to job ikke ikke bliver behandlet på samme maskine på samme tid.

Det er klart, at vi i bladknuderne i branch-and-bound træet vil have en lovlig løsning til problemet MAX-SCHED-NOP.

Grænseværdiberegningen skal tilpasses, så den respekterer allerede schedulerede job. For hvert job j der er blevet scheduleret reducerer vi kapaciteten af (B_{ab}, t) kanterne i MAXIMUM-FLOW problemet i de tidsrum, hvor jobbet er scheduleret. Samtidig fjernes (s, A_j) kanten. Dermed kan samme grænseværdiberegning benyttes. ■