Videregående Algoritmik, DIKU 2005/06
Torsdag 8. december
David Pisinger

Resume sidste gang

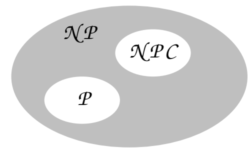
- Abstrakt problem, konkret instans, afgørlighedsproblem
- Effektiv kodning (pol. relateret til binær kodning)
- Sprog L : mængden af instanser for et afgørligheds-problem hvor svaret er 1
- $\mathcal{P} = \{L : L$ genkendes af en algoritme i polynomiel tid$\}$
- $\mathcal{NP} = \{L : L$ verificeres af en polynomieltids algoritme$\}$
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$
- Q er $\mathcal{NP}$-fuldstændig hvis og kun hvis $Q \in \mathcal{NP}$ og $\forall R \in \mathcal{NP} : R \leq_{pol} Q$
- CIRCUIT-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Essentielle spørgsmål: $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?

Et problem Q kaldes $\mathcal{NP}$-fuldstændigt $\Leftrightarrow$

1 $Q \in \mathcal{NP}$

2 $\forall R \in \mathcal{NP} : R \leq_{pol} Q$



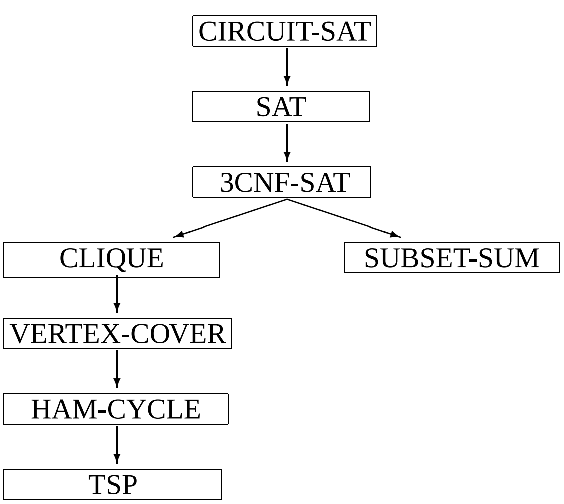
Sætning

Hvis der findes et $\mathcal{NP}$-fuldstændigt problem som er løseligt i polynomiel tid, så er $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$.

Hvis et problem i $\mathcal{NP}$ ikke kan løses i polynomiel tid så kan ingen $\mathcal{NP}$-fuldstændige problemer løses i polynomiel tid.

Oversigt, idag

Bevise at en række problemer er $\mathcal{NP}$-fuldstændige.
Yderligere eksempler kan findes i Garey and Johnson



- Beviser ikke (2) fra grunden, men bruger reduktion
- CIRCUIT-SAT har givet os ”foden inden døre”
- men CIRCUIT-SAT er for generel

Hjælpesætning

- Hvis L er et sprog hvor $L' \leq_{pol} L$ for et problem $L' \in \mathcal{NPC}$ så er L $\mathcal{NP}$-hårdt.
- Hvis endvidere $L \in \mathcal{NP}$ så $L \in \mathcal{NPC}$

Teknik til bevis af $L \in \mathcal{NPC}$

1 Bevis at $L \in \mathcal{NP}$ (dvs kan verificeres i poly. tid)

2 Vælg et kendt $\mathcal{NP}$-fuldstændigt problem L'

3 Beskriv en algoritme f som afbilder $L' \mapsto L$

4 Bevis at f opfylder $x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$ for alle $x \in \{0,1\}^*$

5 Bevis at f kører i polynomiel tid.

Opfyldning af logiske formler

En logisk formel opbygges af

- boolske variable: $x_1, \ldots, x_n$
- boolske operatorer:

$\neg$	NOT
$\wedge$	AND
$\vee$	OR
$\Rightarrow$	medfører
$\Leftrightarrow$	hvis og kun hvis

- paranteser

Eksempel

$$\phi = ((x_1 \Rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \Leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$$

Opfyldende tildeling af sandhedsværdier:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$$

Afgørlighedsproblem

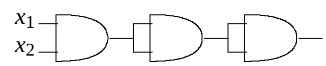
$$\text{SAT} = \{< \phi >: \phi \text{ kan opfyldes}\}$$

SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Bevisets gang

1. Bevis at SAT $\in \mathcal{NP}$ (dvs kan verificeres i poly. tid)
2. Vælg et kendt $\mathcal{NP}$-fuldstændigt problem L'
3. Beskriv en algoritme f som afbilder CIRCUIT-SAT $\mapsto$ SAT
4. Bevis at f opfylder $x \in$ CIRCUIT-SAT $\Leftrightarrow f(x) \in$ SAT for alle $x \in \{0,1\}^*$
5. Bevis at f kører i polynomiel tid.

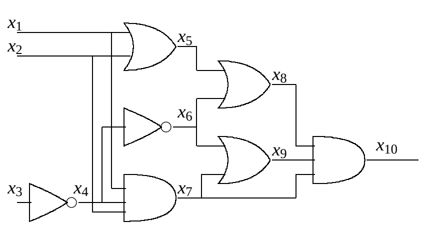
Naiv algoritme f udtrykker output af gate ved input



Polynomiel algoritme f

- Sæt boolske variable på alle ledninger
- Opskriv formel som viser sammenhæng mellem indgange og udgang for hver gate

SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig



Tilhørende formel

$$\begin{aligned}\phi = x_{10} \ & \wedge \ (x_4 \Leftrightarrow \neg x_3) \\ & \wedge \ (x_5 \Leftrightarrow (x_1 \vee x_2)) \\ & \wedge \ (x_6 \Leftrightarrow \neg x_4) \\ & \wedge \ (x_7 \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)) \\ & \wedge \ (x_8 \Leftrightarrow (x_5 \vee x_6)) \\ & \wedge \ (x_9 \Leftrightarrow (x_6 \vee x_7)) \\ & \wedge \ (x_{10} \Leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9))\end{aligned}$$

3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

CNF er Konjunktiv Normal Form

- Konjunktion: $a \wedge b$
- Disjunktion: $a \vee b$

En formel er på CNF hvis den er en konjunktion af en række disjunktioner af logiske variable eller disses negationer.

- literal: variabel x eller negation $\neg x$.
- klausul: et OR-udtryk af literaler
- CNF-formel: et AND-udtryk af klausuler

3CNF-formel har præcis 3 *forskellige* literaler pr. klausul (bruges ved bevis af CLIQUE)

Eksempel

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Afgørlighedsproblem

$$\text{3CNF-SAT} = \{< \phi >: \phi \text{ kan opfyldes}\}$$

3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

1 Bevis at 3CNF-SAT $\in \mathcal{NP}$

2 Vælg et kendt $\mathcal{NP}$-fuldstændigt problem SAT

3 Beskriv en algoritme f som afbilder SAT $\mapsto$ 3CNF-SAT

4 Bevis at f opfylder $x \in$ SAT $\Leftrightarrow f(x) \in$ 3CNF-SAT for alle $x \in \{0,1\}^*$

5 Bevis at f kører i polynomiel tid.

Reduktions-algoritme f: givet logisk udtryk

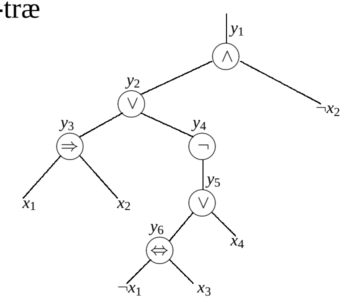
- Byg parse-træ til evaluering — fan-in ≤ 2
- Indfør nye variable y_i til at angive output af hver intern knude
- Opskriv ækvivalent udtryk ϕ' som AND-udtryk
- Hvert AND-udtryk omskrives til CNF
- Clausuler med for få literaler suppleres op til 3

3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Givet instans af SAT

$$\phi = ((x_1 \Rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \Leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$$

Generer parse-træ



Opskriv ækvivalent AND-udtryk

$$\begin{aligned}
\phi' &= (y_1) \\
&\wedge\ (y_1 \Leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\
&\wedge\ (y_2 \Leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\
&\wedge\ (y_3 \Leftrightarrow (x_1 \Rightarrow x_2)) \\
&\wedge\ (y_4 \Leftrightarrow \neg y_5) \\
&\wedge\ (y_5 \Leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\
&\wedge\ (y_6 \Leftrightarrow (\neg x_1 \Leftrightarrow x_3)) \\
&= \phi'_0 \wedge \phi'_1 \wedge \ldots \wedge \phi'_m
\end{aligned}$$

Hvis hver klausul ϕ'_i er på CNF, så er ϕ' på CNF.

3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Sandhedstabel for ϕ'_1

y_1	y_2	x_2	$(y_1 \Leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2))$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

ϕ'_1 er falsk når

$$\begin{aligned}
\neg\phi'_1 &= (y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \\
&\vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge x_2) \\
&\vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \\
&\vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2)
\end{aligned}$$

De-Morgans lov

$$\begin{aligned}
\phi'_1 &= (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_2) \\
&\wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x_2) \\
&\wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_2) \\
&\wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_2)
\end{aligned}$$

Nu er $\phi'' = \phi'_0 \wedge \phi'_1 \wedge \phi'_2 \wedge \ldots \wedge \phi'_m$ på CNF

Hver klausul har *højst* 3 literaler

Alle literaler i klausul er *forskellige*

3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Clausuler med 2 literaler:

$$C_i = (l_1 \vee l_2)$$

erstattes af

$$C_i = (l_1 \vee l_2 \vee p) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \neg p)$$

hvor p er en ny variabel.

Clausuler med 1 literal:

$$C_i = (l_1)$$

erstattes af

$$C_i = (l_1 \vee p \vee q) \wedge (l_1 \vee p \vee \neg q) \wedge (l_1 \vee \neg p \vee q) \wedge (l_1 \vee \neg p \vee \neg q)$$

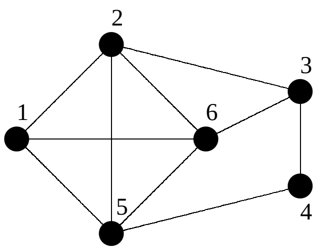
hvor p, q er nye variable.

Klike i en graf

En klike i en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ er en delmængde $V' \subset V$ af knuder således at $(v_i, v_j) \in E$ for alle $v_i, v_j \in V'$.

Afgørlighedsproblem

$$\text{CLIQUE} = \{< G, k >: G \text{ har en klike af størrelse } k\}$$



CLIQUE er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

1 Bevis at CLIQUE $\in \mathcal{NP}$

2 Vælg et kendt $\mathcal{NP}$-fuldstændigt problem 3CNF-SAT

3 Beskriv en algoritme f som afbilder 3CNF-SAT $\mapsto$ CLIQUE

4 Bevis at f opfylder $x \in$ 3CNF-SAT $\Leftrightarrow f(x) \in$ CLIQUE for alle $x \in \{0,1\}^*$

5 Bevis at f kører i polynomiel tid.

Reduktions-algoritme f: Givet udtryk på 3CNF

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

hver klausul C_r har 3 *forskellige* literaler (l_1^r, l_2^r, l_3^r).

For eksempel

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

som kan tilfredsstilles med $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$.

CLIQUE er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Motivation

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

- mindst en literal skal være sand i hver klausul
- knude repræsenterer literal: Literal sand $\Leftrightarrow$ knude vælges i klike
- klike størrelse er k (antal klausuler)
- sikrer at kun en literal fra hver klausul vælges ved ikke at have kanter mellem disse
- graf skal være konsistent: ej kant mellem x og $\neg x$

CLIQUE er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

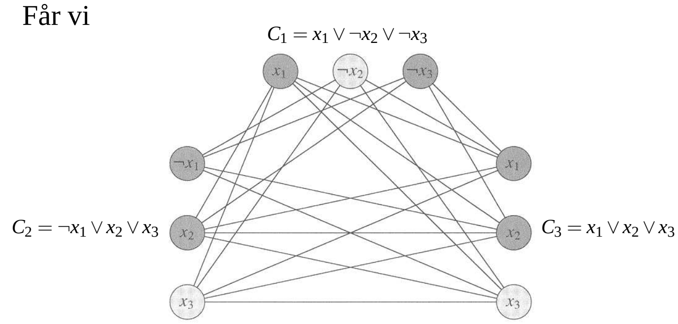
Konstruerer graf

- For hver klausul $C_r = (l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r)$ indfør 3 knuder v_1^r, v_2^r, v_3^r.
- Indfør en kant mellem v_i^r og v_j^s hvis
  - $r \neq s$ dvs. l_i^r og l_j^s er i forskellige klausuler
  - l_i^r er ikke negation af l_j^s (literaler er *konsistente*).
- k (klike størrelse) er antal klausuler.

For det givne eksempel

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Får vi



Maksimal klike $\neg x_2$, x_3 og x_3. Variable svarende til knuder som ikke er i kliken kan sættes arbitrært i ϕ

CLIQUE er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

ϕ er en reduktion:

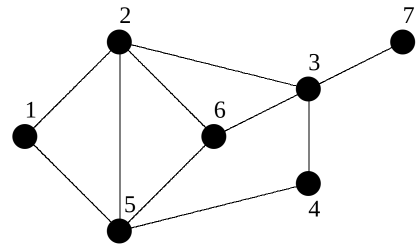
- Antag ϕ har en tilfredsstillende tildeling.
  Så findes k literaler fra hver sin klausul som alle er sande. Vælg disse som klike.
  - Klike størrelse er korrekt
  - Der findes kanter mellem alle par af knuder i kliken
- Antag G har en klike af størrelse k.
  Sæt literal til sand, hvis tilhørende knude er valgt. Hvis nogle variable ikke defineres på denne vis, kan de sættes arbitrært.
  - Ingen konflikter opstår (f.eks. $x_1 = 1$ og $\neg x_1 = 1$)
  - En literal i hver klausul er sand

Knudeoverdækning

En knudeoverdækning af en ikke orienteret graf $G = (V, E)$ er en delmængde af $V' \subseteq V$ så

$$(u, v) \in E \Rightarrow u \in V' \text{ eller } v \in V' \text{ (eller begge)}$$

Størrelsen af en knudeoverdækning er $k = |V'|$.
Knudeoverdækningsproblemet søger den mindste overdækning i grafen.



Afgørlighedsproblem

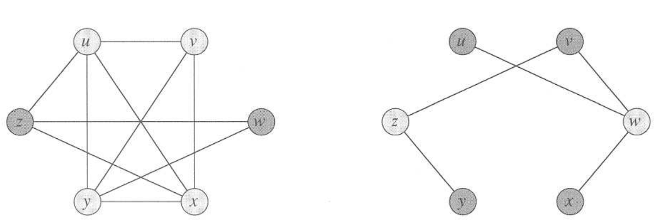
$$\text{VERTEX-COVER} = \{< G, k >: \text{ grafen } G \text{ har en knudeoverdækning af størrelse } k\}$$

VERTEX-COVER er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

1. Bevis at VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$
2. Vælg et kendt $\mathcal{NP}$-fuldstændig problem CLIQUE
3. Beskriv en algoritme f som afbilder
   CLIQUE $\mapsto$ VERTEX-COVER
4. Bevis at f opfylder
   $x \in$ CLIQUE $\Leftrightarrow$
   $f(x) \in$ VERTEX-COVER for alle $x \in \{0, 1\}^*$
5. Bevis at f kører i polynomiel tid.

Reduktions-algoritme f : CLIQUE $\Rightarrow$ VERTEX-COVER

$$f :< G, k > \mapsto < \overline{G}, |V| - k >$$



(a) (b)

VERTEX-COVER er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Reduktion

- Antag at G har klike $V' \subseteq V$ med $|V'| = k$.
  Vil vise at $V - V'$ er en knudeoverdækning i $\overline{G}$ af størrelse $|V| - k$
- Antag at $\overline{G}$ har en knudeoverdækning $V' \subseteq V$ hvor $|V'| = |V| - k$.
  Vil vise at $V - V'$ er en klike af størrelse $|V| - |V'| = k$.

Resume

- Teknik til at bevise at problem $P \in \mathcal{NPC}$
- CIRCUIT-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig
- SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig
- 3CNF-SAT er $\mathcal{NP}$-fuldstændig
- CLIQUE er $\mathcal{NP}$-fuldstændig
- VERTEX-COVER er $\mathcal{NP}$-fuldstændig

Overraskende resultater

- Alle ovenstående problemer er "polynomielt ækvivalente"
- Reduktion kan gøres mellem vidt forskellige problemer
- Siden klassen af $\mathcal{NP}$-fuldstændige problemer indeholder tusinder af problemer, har vi grund til at tro at en polynomiel algoritme ikke findes for nogen af dem.