

6. december

Talteoretiske algoritmer, RSA kryptosystemet, Primtalstest

- Motivation
- Definitioner
- Euclids algoritme
- Udvidet Euclid
- RSA kryptosystemet
- Randomiserede algoritmer
- Rabin-Miller primtalstest
- Svært at faktorisere

1

Motivation

Internettet:

- Login til DIKU (med password)
- Handel med dankort
- Fortrolig besked
- Digital signatur

Behov for kryptografi

Sikkerhed i RSA beror på

- Det er svært at faktorisere et heltal
- Det er relativt let at finde primtal

Har ikke bevist: svært at faktorisere
Derfor: 1 mio \$ til den der kan bryde systemet

Indtil for nylig: talteori smukt men ubrugeligt
Nu: vigtigt redskab i kryptologi

2

Definitioner

d går op i a	$d \mid a$	$5 \mid 15$
d går ikke op i a	$d \nmid a$	$7 \nmid 15$
primtal		2, 3, 5, 7, 11, 13
sammensat tal		4, 15, 21, 22

Definition af modulo

Divisions theorem 31.1

For ethvert $a \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$ er der unikke heltal q, r med $0 \leq r < n$ hvor $a = qn + r$

$q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$ kaldes kvotient r kaldes rest (modulo n)

Skrivemåde $r = a \bmod n$

Ækvivalensklasse modulo n

Heltal med samme rest, opfattes som ækvivalensklasse

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

F.eks.

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$$

hvor

- 0 repræsenterer $\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots$
- 1 repræsenterer $\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots$
- 2 repræsenterer $\dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots$
- 3 repræsenterer $\dots, -11, -4, 3, 10, 17, \dots$

3

Største fælles divisor

fælles divisor $d = \text{cd}(a, b) \Leftrightarrow d \mid a$ og $d \mid b$.
største fælles divisor $d = \text{gcd}(a, b)$

eksempel: $\text{gcd}(21, 35) = 7$

$$\begin{aligned}\text{gcd}(a, b) &= \text{gcd}(b, a) \\ \text{gcd}(a, b) &= \text{gcd}(-a, b) \\ \text{gcd}(a, b) &= \text{gcd}(|a|, |b|) \\ \text{gcd}(a, 0) &= |a| \quad (\text{definition}) \\ \text{gcd}(a, ka) &= |a|, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Relativt primiske

a og b er relativt primiske hvis $\text{gcd}(a, b) = 1$

eksempel: 21 og 25 er relativt primiske

Entydig primtalsfaktorisering

Ethvert positivt heltal a kan skrives entydigt på formen

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$$

hvor p_1, p_2, \dots, p_r er primtal, og e_1, e_2, \dots, e_r er de tilhørende potenser.

eksempel: $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$

4

Regneregler

$$d \mid a \text{ og } d \mid b \Rightarrow d \mid (ax + by) \text{ for alle } x, y \in \mathbb{Z} \quad (31.4)$$

$$a \mid b \text{ og } b \mid a \Rightarrow a = \pm b \quad (31.5)$$

$$d \mid a \text{ og } d \mid b \Rightarrow d \mid \gcd(a, b) \quad (\text{korollar 31.3})$$

eksempel:

$$7 \mid 14 \Rightarrow 7 \mid x \cdot 14$$

$$7 \mid 35 \Rightarrow 7 \mid y \cdot 35$$

eksempel:

$$a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

5

Euclids algoritme

Theorem 31.9

$$x = \boxed{\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)} = y$$

Når $x, y > 0$ har vi fra (31.5) at

$$x \mid y \text{ og } y \mid x \Rightarrow x = y$$

viser $x \mid y$

Lad $x = \gcd(a, b)$ så $x \mid a$ og $x \mid b$

$$(a \bmod b) = a - qb \text{ hvor } q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$$

Bemærk at

$$x \mid (a - qb) \quad (\text{da linearkombination af } a, b)$$

Dermed $x \mid (a \bmod b)$. Fra korollar 31.3

$$x \mid b \text{ og } x \mid (a \bmod b) \Rightarrow x \mid \gcd(b, a \bmod b)$$

viser $y \mid x$

Lad $y = \gcd(b, a \bmod b)$ så $y \mid b$ og $y \mid (a \bmod b)$

$$a = qb + (a \bmod b) \text{ hvor } q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$$

Bemærk at

$$y \mid qb + (a \bmod b) \quad (\text{da linearkomb. af } b, (a \bmod b))$$

Dermed $y \mid a$. Fra korollar 31.3

$$y \mid a \text{ og } y \mid b \Rightarrow y \mid \gcd(a, b)$$

6

Euclids algoritme, (Elements of Euclid år 300 f.kr.)

Fra theorem 31.9 har vi rekursion

$$\gcd(a, b) := \gcd(b, a \bmod b)$$

Stopbetingelse $\gcd(a, 0) = |a|$.

Rekursion må terminere da andet argument $(a \bmod b) < b$ er aftagende

EUCLID(a, b)

1 if $b = 0$

2 then return a

3 else return EUCLID($b, a \bmod b$)

Eksempel

$$\begin{aligned} \text{EUCLID}(30, 21) &= \text{EUCLID}(21, 9) \\ &= \text{EUCLID}(9, 3) \\ &= \text{EUCLID}(3, 0) \\ &= 3 \end{aligned}$$

7

Euclids algoritme, tidskompleksitet

Fibonacci tal: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Øvre grænse

Hvis $a > b \geq 1$ og EUCLID(a, b) udfører $k \geq 1$ rekursive kald, så er $a \geq F_{k+2}$ og $b \geq F_{k+1}$.

Hvis $a > b$ så i rekursive kald er $(b > a \bmod b)$

Induktion i k

$k = 1$ $b \geq 1 = F_2, a > b$ så $a \geq 2 = F_3$

$k > 1$ Lemma holder for $k - 1$.

– Da $b > 0$ vil EUCLID(a, b) kalde EUCLID($b, a \bmod b$) som laver $k - 1$ rekursive kald. Pga. induktionsantagelsen er $b \geq F_{k+1}$, og $(a \bmod b) \geq F_k$.

– Da $a > b > 0$ vil $\lfloor a/b \rfloor \geq 1$ så

$$b + (a \bmod b) = b + (a - \lfloor a/b \rfloor b) \leq a$$

Dermed

$$a \geq b + (a \bmod b) \geq F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$$

Theorem 31.11: Antag $a > b \geq 1$ og $b < F_{k+1}$. Da vil EUCLID(a, b) udføre højst k rekursive kald

8

Nedre grænse

EUCLID laver præcist $k - 1$ kald med input F_{k+1}, F_k .

Induktion i k

$k = 2$ EUCLID(F_3, F_2) laver 1 kald

$k > 2$ EUCLID(F_{k+1}, F_k) = EUCLID(F_k, F_{k-1})

Fibonacci tal: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Store-O

- $F_k \approx \phi^k / \sqrt{5}$
hvor $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ (golden ratio)
- $F_k = \Theta(2^k)$ så med input $b = F_k$ fås k iterationer
- EUCLID(a, b) kører i $O(\log b)$

9

Udvidet Euclids algoritme

Find $x, y \in \mathbb{Z}$ så

$$d = \gcd(a, b) = ax + by$$

(findes altid da giver konstruktiv algoritme)

```

( $d, x, y$ ) = EXTENDED-EUCLID( $a, b$ )
1 if  $b = 0$ 
2   then return ( $a, 1, 0$ )
3 ( $d', x', y'$ ) ← EXTENDED-EUCLID( $b, a \bmod b$ )
4 ( $d, x, y$ ) ← ( $d', y', x' - \lfloor a/b \rfloor y'$ )
5 return ( $d, x, y$ )

```

Eksempel

a	b	$\lfloor a/b \rfloor$	d	x	y
99	78	1	3	-11	14
78	21	3	3	3	-11
21	15	1	3	-2	3
15	6	2	3	1	-2
6	3	2	3	0	1
3	0	-	3	1	0

Så vi har

$$\gcd(99, 78) = 3 = 99 \cdot (-11) + 78 \cdot 14$$

10

Udvidet Euclids algoritme

Returnerer $d = \gcd(a, b) = ax + by$ i hver iteration

- hvis $b = 0$
returnerer $(d, x, y) = (a, 1, 0)$ som overholder
$$d = a \cdot 1 + b \cdot 0 = ax + by$$

- hvis $b \neq 0$
Har (d', x', y') hvor
$$d' = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$d' = bx' + (a \bmod b)y' \text{ (induktionsantagelse)}$$

Så vi har

$$d = \gcd(a, b) = d' = \gcd(b, a \bmod b)$$

For at finde x og y så $d = ax + by$

$$\begin{aligned}
 d &= bx' + (a - \lfloor a/b \rfloor b)y' \\
 &= ay' + b(x' - \lfloor a/b \rfloor y')
 \end{aligned}$$

Så hvis vi vælger $x = y'$ og $y = x' - \lfloor a/b \rfloor y'$ har vi

$$d = ax + by$$

Køretid

Som EUCLID

11

Modulo regning

Modulo regning er som almindelig regning blot erstattes resultatet x med x modulo n .

Definition

$$\begin{aligned}
 a \oplus_n b &:= a + b \pmod{n} \\
 a \odot_n b &:= a \cdot b \pmod{n}
 \end{aligned}$$

Eksempel

\oplus_6	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

\odot_{15}	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

Bemærk: ikke alle tal forekommer i sidste tabel

12

Additiv og multiplikativ gruppe

[*gruppe*: lukket, associativ, neutralt-element, alle har invers]

- \mathbb{Z}_n er additiv gruppe modulo n
 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
- \mathbb{Z}_n^* er multiplikative gruppe modulo n tal der er relativt primiske med n , dvs:
 $\{a \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(a, n) = 1\}$

Eksempel: $\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

Størrelse af multiplikativ gruppe \mathbb{Z}_n^*

Eulers phi-funktion

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

hvor p løber over alle primtal der går op i n (incl. n , hvis n er primtal).

Eksempel: \mathbb{Z}_{15}^*

$$\phi(15) = 15 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 8$$

13

Multiplikativt inverse

Multiplikativt inverse (en slags "division" i gruppen \mathbb{Z}_n^*)

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Da \mathbb{Z}_n^* er en gruppe findes inverse element altid

Eksempel

$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

\odot_{15}	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

14

Løsning af ligninger modulo n

For givne $a, n > 0$ og $b \geq 0$ find $x \in \mathbb{N}$ så

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

Da vi regner modulo kan der være 0 eller flere løsninger, f.eks.

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 3 \pmod{4} \text{ har løsning } x \in \{\} \\ 2x &\equiv 2 \pmod{4} \text{ har løsning } x \in \{1, 3, 5, \dots\} \end{aligned}$$

Nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at findes løsning

$$b \in \langle a \rangle = \{ax \pmod{n} : x > 0\}$$

Theorem 31.23

Antag at $d = \gcd(a, n)$ og antag $d = ax' + ny'$ som bestemt af EXTENDED-EUCLID. Hvis $d \mid b$ så har

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

en mulig løsning givet ved

$$x = x'(b/d) \pmod{n}$$

Bevis

$$\begin{aligned} ax &\equiv ax'(b/d) \pmod{n} \\ &\equiv d(b/d) \pmod{n} \\ &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

15

Korollar 31.26

Givet $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, hvis $\gcd(a, n) = 1$ for et $a \in \mathbb{Z}_n$ så har

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

een unik løsning modulo n .

Denne kaldes den *multiplikativt inverse* a^{-1} .

$$d = \gcd(a, n) = ax + ny \Leftrightarrow$$

$$1 = ax + ny \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv ax \pmod{n}$$

Husk:

$$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(a, n) = 1\}$$

dvs alle elementer i \mathbb{Z}_n^* har unik multiplikativt invers

Opsummering EXTENDED-EUCLID

- $\gcd(a, b)$
- $\gcd(a, b) = ax + by$
- $ax \equiv b \pmod{n}$
- a^{-1}

16

Kinesisk restklassesætning (Sun-Tsü år 100)

Find alle heltal x hvor

- $x \bmod 3 = 2$
- $x \bmod 5 = 3$
- $x \bmod 7 = 2$

Et sådant heltal er $x = 23$

Alle heltal på formen $x = 23 + 105k$

Bemærk: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Theorem 31.27 (kinesisk restklassesætning)

Lad $n = n_1, n_2, \dots, n_k$ hvor n_i 'erne er parvist primiske.

Hvis

$$a \leftrightarrow (a_1, \dots, a_k), \quad a \in \mathbb{Z}_n, a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$$

$$b \leftrightarrow (b_1, \dots, b_k), \quad b \in \mathbb{Z}_n, b_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$$

så gælder regnereglerne

$$(a + b) \bmod n \leftrightarrow ((a_1 + b_1) \bmod n_1, \dots, (a_k + b_k) \bmod n_k)$$

$$(a - b) \bmod n \leftrightarrow ((a_1 - b_1) \bmod n_1, \dots, (a_k - b_k) \bmod n_k)$$

$$(ab) \bmod n \leftrightarrow ((a_1 b_1) \bmod n_1, \dots, (a_k b_k) \bmod n_k)$$

hvor $a_i = a \bmod n_i$.

Eksempel (figur 31.3)

$$n = n_1 n_2$$

$$65 = 5 \cdot 13 \quad (n_1 = 5 \text{ og } n_2 = 13).$$

$$m_i = \frac{n}{n_i} = \frac{n_1 n_2}{n_i}$$

$$c_i = m_i (m_i^{-1} \bmod n_i)$$

$$m_1 = \frac{n_1 n_2}{n_1} = n_2 = 13$$

$$m_2 = \frac{n_1 n_2}{n_2} = n_1 = 5$$

$$c_1 = 13(13^{-1} \bmod 5) = 26$$

$$c_2 = 5(5^{-1} \bmod 13) = 40.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	40	15	55	30	5	34	20	60	35	10	50	25
1	26	1	41	16	56	31	6	46	21	61	36	11	51
2	52	27	2	42	17	57	32	7	47	22	62	37	12
3	13	53	28	3	43	18	58	33	8	48	23	63	38
4	39	14	54	29	4	44	19	59	34	9	49	24	65

Ækvivalens

$$a \equiv (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_k c_k) \pmod{n}$$

Korollar 31.29 (bruges i korrekthed af RSA)

Hvis n_1, n_2, \dots, n_k er parvist primiske, og $n = n_1 n_2 \dots n_k$ så gælder for alle heltal x og a at

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{n_i} \text{ for } i = 1, 2, \dots, k && \Leftrightarrow \\ x &\equiv a \pmod{n} \end{aligned}$$

Eksempel $n_1 = 5, n_2 = 13$

$$n = n_1 n_2 \quad 65 = 5 \cdot 13 \quad 5 \text{ og } 13 \text{ primiske}$$

$$\left. \begin{aligned} 69 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 69 &\equiv 4 \pmod{13} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow 69 \equiv 4 \pmod{65}$$

Potens af element

Givet $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{Z}_n$, find

$$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots \text{ modulo } n$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$3^i \bmod 7$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	...
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$2^i \bmod 7$	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	...

Theorem 31.30 (Eulers theorem) For ethvert heltal $n > 1$ gælder $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ for alle $a \in \mathbb{Z}_n^*$

Theorem 31.31 (Fermats [lille] theorem) Hvis p er et primtal så er $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ for alle $a \in \mathbb{Z}_p^*$

Bemærk at $0 \notin \mathbb{Z}_n^*$ så $0^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$

Eksempel: $\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\phi(7) = 7 \cdot (1 - \frac{1}{7}) = 6$$

$$a^{\phi(7)} \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{for alle } a \in \mathbb{Z}_7^*$$

$$a^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{for alle } a \in \mathbb{Z}_7^*$$

Potensopløftning ved gentagen kvadrering

Udregn:

$$a^b \bmod n \quad a, b \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$$

Udnytter at

$$a^{2c} \bmod n = (a^c)^2 \bmod n$$

$$a^{2^{c+1}} \bmod n = a(a^c)^2 \bmod n$$

Algoritme

Lad $b = \langle b_k, b_{k-1}, \dots, b_1, b_0 \rangle$ være binære kodning af b

Invariant: $c = \langle b_k, \dots, b_i \rangle$, $d = a^c \bmod n$ i skridt i

MODULAR-EXPONENTIATION(a, b, n)

1 $c \leftarrow 0$

2 $d \leftarrow 1$

3 **for** $i \leftarrow k$ **downto** 0 **do**

4 $c \leftarrow 2c$

5 $d \leftarrow (d \cdot d) \bmod n$

6 **if** $b_i = 1$ **then**

7 $c \leftarrow c + 1$

8 $d \leftarrow (d \cdot a) \bmod n$

9 **return** d

Køretid

Antag: $a, b, n \leq 2^\beta$

Iterationer: $O(\beta)$. Multiplikation: $O(\beta^2)$ bitoperationer

Totalt: $O(\beta^3)$

Potensopløftning, eksempel

Udregn $11^{19} \bmod 21$

$$a = 11$$

$$b = 19 = \langle 10011 \rangle$$

$$n = 21$$

i	c	d
4	1	11
3	2	16
2	4	4
1	9	8
0	19	11