

Videregående algoritmik, prøveeksamen

David Pisinger

Vinter 2004-05

Dette er en prøve-eksamen, og sættet er derfor ikke helt så gennemarbejdet som et rigtigt eksamenssæt. Multiple-choice spørgsmål besvares med spørgsmåls-nummer og svarmulighed, f.eks. 1A. Tekstspørgsmål besvares med fuld tekst.

Talteori

Lad $n = 35$. Find den multiplikativt inverse a^{-1} af tallet $a = 5$ i gruppen $\mathbb{Z}_{\phi(n)}^*$.

Q 1: Hvad er værdien af a^{-1} ?

- | | |
|--------|--------|
| 1A) 3 | 1D) 5 |
| 1B) 7 | 1E) 9 |
| 1C) 11 | 1F) 13 |

■

Max-cut problem

Q 2: Opskriv en matematisk model for MAX-CUT-DECISION(V, E, h) defineret på grafen $G = (V, E)$ udtrykt ved variable $x_i \in \{-1, 1\}$, hvor $x_i = 1$ hvis knude $i \in S$, og $x_i = -1$ hvis knude $i \in T$. Lad endvidere $e_{ij} = 1$ hvis kant $(i, j) \in E$, og $e_{ij} = 0$ ellers. Antallet af knuder i V er $n = |V|$. Hvad er den korrekte formulering af problemet?

- 2A) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} e_{ij} (1 - x_i x_j) \geq h \end{array} \right\}$
- 2B) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} x_i x_j \geq h \end{array} \right\}$
- 2C) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} e_{ij} (1 - x_i x_j) \leq h \end{array} \right\}$
- 2D) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} x_i x_j \leq h \end{array} \right\}$
- 2E) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} (x_i + x_j) \geq h \end{array} \right\}$
- 2F) MAX-CUT-DECISION(V, E, h) = $\left\{ \begin{array}{l} \langle V, E, h \rangle : \text{der findes } (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \text{ så} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} (x_i - x_j) \leq h \end{array} \right\}$

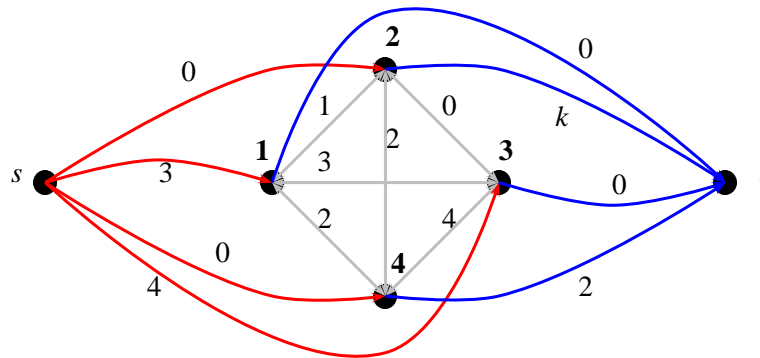
■

Kvadratisk programmering

Betragt det kvadratiske 0-1 optimeringsproblem QP defineret i projektopgave 3. En instans af QP er givet ved:

$i \ j$	1	2	3	4
1	-3	1	3	2
2	1	-4	0	2
3	3	0	-3	4
4	2	2	4	-10

Da alle elementer udenfor diagonalen er ikke-negative, kan instansen løses i polynomiel tid ved at transformere instansen til en instans af MAXIMUM-FLOW. Herved fremkommer følgende netværk \mathcal{N} :



Q 3: Hvad er værdien af k ?

- | | |
|-------|--------|
| 3A) 0 | 3D) -1 |
| 3B) 1 | 3E) -2 |
| 3C) 2 | 3F) 3 |

■

Q 4: Hvad er den optimale løsningsværdi z af QP-instansen?

- | | |
|-------------|-------------|
| 4A) $z = 2$ | 4D) $z = 5$ |
| 4B) $z = 3$ | 4E) $z = 6$ |
| 4C) $z = 4$ | 4F) $z = 7$ |

■

Reduktion

Vi vil vise at QP-DECISION(d, k) er NP-fuldstændigt ved reduktion fra MAX-CUT-DECISION(V, E, h), hvor vi for sidstnævnte problem anvender formuleringen med $\{-1, 1\}$ variable beskrevet for oven.

Q 5: Hvilken reduktion er rigtig

- 5A) Afbildningen $f : \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h) \rightarrow \text{QP-DECISION}(d, k)$ er givet ved
- $$d_{ij} := \begin{cases} 1 - e_{ij} & \text{hvis } i \neq j \\ (\sum_{j=1}^n e_{ij}) - e_{ii} & \text{hvis } i = j \end{cases}, \quad k := h$$
- 5B) Afbildningen $f : \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h) \rightarrow \text{QP-DECISION}(d, k)$ er givet ved
- $$d_{ij} := \begin{cases} -e_{ij} & \text{hvis } i \neq j \\ (\sum_{j=1}^n e_{ij}) - e_{ii} & \text{hvis } i = j \end{cases}, \quad k := h$$
- 5C) Afbildningen $f : \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h) \rightarrow \text{QP-DECISION}(d, k)$ er givet ved
- $$d_{ij} := e_{ij}, \quad k := h$$
- 5D) Afbildningen $f : \text{QP-DECISION}(d, k) \rightarrow \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h)$ er givet ved
- $$V = \{1, \dots, n\}, E = \{(i, j) \mid d_{ij} \geq 1\}, \quad h := k$$
- 5E) Afbildningen $f : \text{QP-DECISION}(d, k) \rightarrow \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h)$ er givet ved
- $$V = \{1, \dots, n\}, E = \{(i, j) \mid d_{ij} \geq 0\}, \quad h := k$$
- 5F) Afbildningen $f : \text{QP-DECISION}(d, k) \rightarrow \text{MAX-CUT-DECISION}(V, E, h)$ er givet ved
- $$V = \{1, \dots, n/2\}, E = \{(i, j) \mid d_{ij} = 1 \vee d_{ij} = -1\}, \quad h := k$$

■

Q 6: Hvad er køretiden af ovenstående afbildning f , hvis $m = |V| + |E|$ angiver længden af input $I = \langle V, E \rangle$ repræsenteret i standard kodning.

- | | |
|--------------|-------------------|
| 6A) $O(m)$ | 6D) $O(m^2)$ |
| 6B) $O(m^3)$ | 6E) $O(\sqrt{m})$ |
| 6C) $O(2^m)$ | 6F) $O(m \log m)$ |

■

Approximationsalgoritmer

I knapsack problemet er der givet

- en mængde $N = \{1, \dots, n\}$ af genstande
- en profit $p_i \in \mathbb{Z}^+$ for hver genstand $i \in N$
- en vægt $w_i \in \mathbb{Z}^+$ for hver genstand $i \in N$
- en knapsack (rygsæk) med kapacitet $c \in \mathbb{Z}^+$

Problemet er at vælge en delmængde $S \subseteq N$ således at $\sum_{j \in S} p_j$ bliver maximeret idet kapacitets begrænsningen $\sum_{j \in S} w_j \leq c$ skal overholdes.

Q 7: Tekstspørgsmål

- a) *Approximationsalgoritme.* Den grådige algoritme sorterer først elementerne efter aftagende p_i/w_i forhold, og tilføjer herefter genstande til rygsækken $i = 1, 2, \dots$ så længe der er plads til dem. Lad z^G betegne den fundne løsning. Vis at den grådige algoritme ikke er en approximations algoritme med fast faktor ρ .

b) En forbedret grådig algoritme finder først

$$p_{\max} = \max_{i \in N} p_i$$

og returnerer herefter den approximative løsning

$$z^A = \max\{p_{\max}, z^G\}$$

Vis at den forbedrede algoritme er en approximations algoritme med approximations faktor (*ratio bound*) $\rho = 2$.

■

Grænseværdier

Det kvadratiske knapsack problem (QKP) er givet ved

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i x_j \\ & \text{subject to} && \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c \\ & && x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Q 8: Tekstspørgsmål

Lad \bar{p}_j for hvert $j = 1, \dots, n$ være givet som løsning til følgende maximeringsproblem

$$\bar{p}_j = \max \left\{ \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i \mid \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq c; x_i \in \{0, 1\} \right\}$$

Vis at en øvre grænseværdi \mathcal{U} for QKP kan findes som

$$\mathcal{U} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n \bar{p}_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c; x_j \in \{0, 1\} \right\}$$

■