30 marts

Løsning af $\mathcal{NP}$-hårde problemer

- Løs til optimalitet i eksponentiel tid
- Find tilnærmet løsning i polynomiel tid

Oversigt

- Optimeringsproblemer $\leftrightarrow$ afgørlighedsproblemer
- Klassen $\mathcal{EXP}$, og brute-force metoden
- Divide-and-conquer
- Grænseværdier
- Branch-and-bound
- Et konkret eksempel: knapsack problemet

Selv om alle $\mathcal{NP}$-fuldstændige problemer kan reduceres til hinanden skal specifik struktur udnyttes

Afgørlighedsproblem versus optimeringsproblem

Traveling Salesman, afgørlighedsproblem

$$\text{TSP} = \{< G, c, k >: \begin{array}{l} G = (V,E) \text{ er en komplet graf,} \\ c \text{ er en afstands matrix,} \\ k \text{ er et heltal,} \\ G \text{ har Hamilton-kreds af længde } \leq k\} \end{array}$$

Traveling Salesman, optimeringsproblem

$$\text{TSP-OPT} = \{< G, c >: \begin{array}{l} G = (V,E) \text{ er en komplet graf,} \\ c \text{ er en afstands matrix,} \\ \text{find korteste Hamilton-kreds}\} \end{array}$$

Optimeringsproblemer mere naturlige, “nemmere” at løse

$\mathcal{NP}$-hård

- Optimeringsproblem er $\mathcal{NP}$-hårdt $\Leftrightarrow$
- Tilhørende afgørlighedsproblem er $\mathcal{NP}$-fuldstændigt

Optimeringsproblemer og afgørlighedsproblemer

Optimeringsproblem i *maksimeringsform*

$$z = \max\{ f(x) \mid x \in S\}$$

- $f(x)$ er objektfunktionen
- S er løsningsrummet
- z er optimale løsningsværdi
- optimale løsning, dvs. det x^* hvor $z = f(x^*)$
- verifikation af x^* lige så svært som at løse problem

Optimeringsproblem i *minimeringsform*

$$z = \min\{ f(x) \mid x \in S\}$$

omformes ved at maksimere $-f(x)$

Knapsack problem

- *profit* af genstand $p_j \in \mathbb{N}$
- *vægt* af genstand $w_j \in \mathbb{N}$
- *kapacitet* af rygsæk $c \in \mathbb{N}$

$$z = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c,\ x_j \in \{0,1\} \right\}$$

- objektfunktion $f(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$
- løsningsrum $S = \{x \in \{0,1\} \mid \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c\}$

Eksempel

$c = 9$, $n = 7$

j	1	2	3	4	5	6	7
p_j	6	5	8	9	6	7	3
w_j	2	3	6	7	5	9	4

Optimale løsning: vælg genstande 1 og 4, $z = 15$.

Søgebaserede algoritmer

- polynomielle problemer: konstruktiv algoritme
- $\mathcal{NP}$-hårde problemer: søgebaseret algoritme

Branch-and-bound

- Søgebaseret
- Paradigme
- Total gennemsøgning af løsningsrummet (brute-force)
- Matematiske overvejelser udelukker dele af løsningsrummet (grænseværditest)
- Opdeler løsningsrum (divide-and-conquer)
- “Samler” løsninger fra delproblemer

Brute-force metoder

Definition 1 *Klassen $\mathcal{EXP}$: afgørlighedsproblemer som kan løses i eksponentiel tid på deterministisk TM*

$L \in \mathcal{EXP} \Leftrightarrow \exists p(n) : \forall x, |x| = n,$ *x kan afgøres i tid* $2^{p(n)}$

For ethvert $\mathcal{NP}$-problem

- findes et "kort" (dvs. polynomielt) *certifikat*
- kan et certifikat *verificeres* i polynomiel tid

Sætning 1 *Hvis $L \in \mathcal{NP}$ så gælder også at $L \in \mathcal{EXP}$*

Algoritme:

- Gennemløbe alle kombinationer af certifikatet
- For hvert certifikat test om verifikationsalgoritmen returnerer "ja"

Køretid:

- Verifikationsalgoritme $A(x,y)$ hvor $|y| \leq p_2(|x|)$, køretid $p_1(|x|)$
- Alle konbinationer af certifikat $2^{|y|} \leq 2^{p_2(|x|)}$
- Hvert certifikat verificeres i $p_1(|x|)$
- Tid: $2^{p_2(|x|)} \cdot p_1(|x|) = 2^{p_2(|x|)} \cdot 2^{\log p_1(|x|)} = 2^{p_2(|x|)+\log p_1(|x|)}$

Løsningsrummet for et $\mathcal{NP}$-hårdt problem er begrænset!

Divide and Conquer

- Brute-force metoden for afgørlighedsproblemer
- Divide and conquer for optimeringsproblemer

$$z = \max\{f(x) \mid x \in S\}$$

Sætning 2

- *$S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ opdeling af S i mindre mængder*
- *$z_i = \max\{f(x) \mid x \in S_i\}$ løsningsværdi for S_i*
- *så gælder*

$$z = \max_{i=1,\ldots,k} z_i$$

Bevis:

$$\begin{aligned} z &= \max\{f(x) \mid x \in S\} \\ &= \max\{f(x) \mid x \in S_1 \cup \ldots \cup S_k\} \\ &= \max_{i=1,\ldots,k} \max\{f(x) \mid x \in S_i\} \\ &= \max_{i=1,\ldots,k} z_i \end{aligned}$$

$\square$

Delproblem: optimeringsproblem begrænset til S_i

Divide and Conquer, eksempel

Knapsack problem, $n = 3$ genstande, kapacitet $c = 6$

j	1	2	3
p_j	6	8	3
w_j	2	6	4

- Løsningsrum

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c, x_j \in \{0,1\}\}$$

- Opdeling af S: x_1 sættes til 0 eller 1

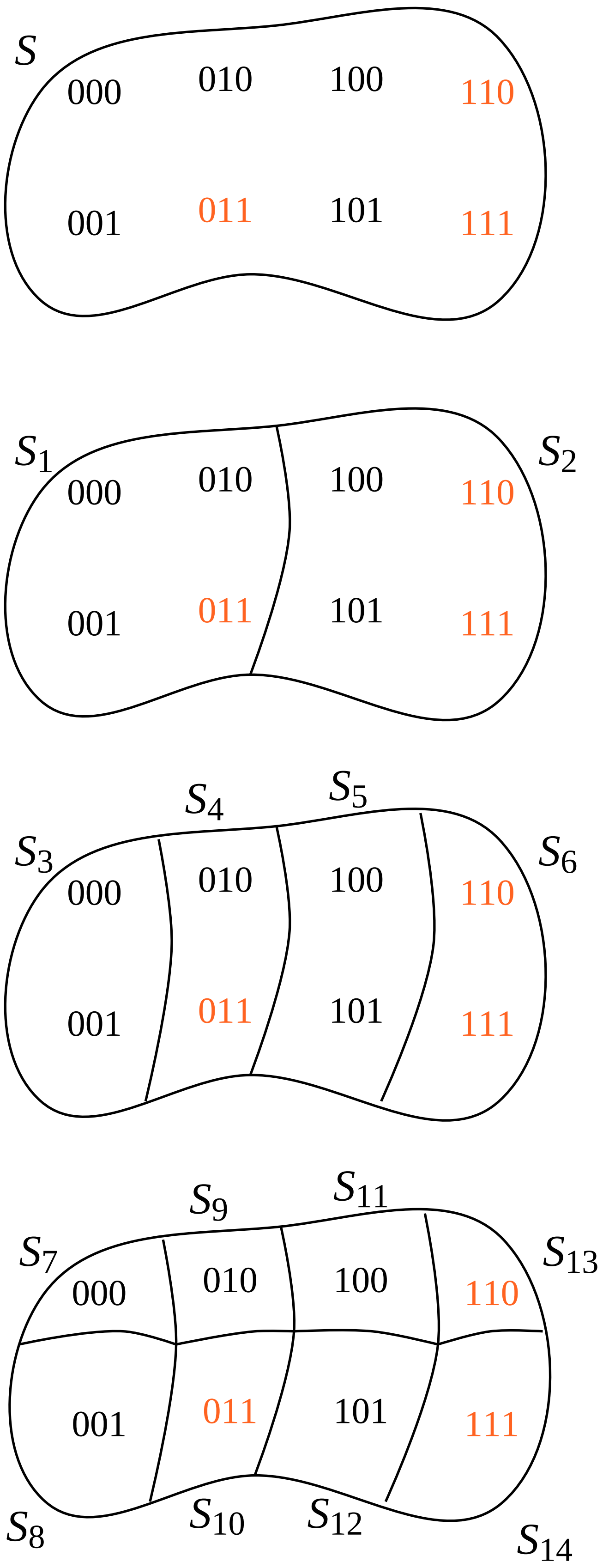
$$S_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \subseteq S \mid x_1 = 0\}$$
$$S_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \subseteq S \mid x_1 = 1\}$$

- Opdeling af S_1: x_2 sættes til 0 eller 1

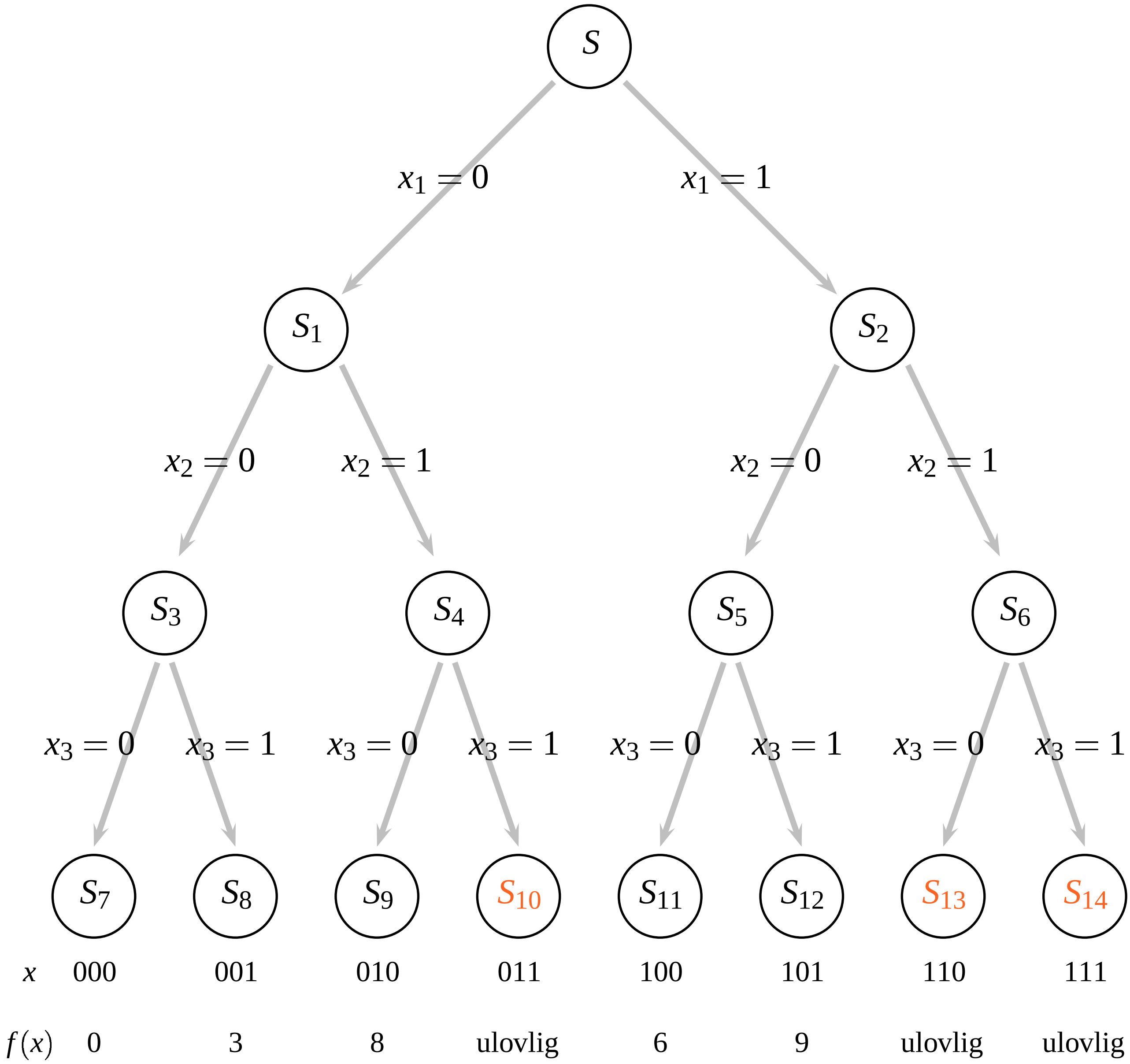
$$S_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \subseteq S_1 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$$
$$S_4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \subseteq S_1 \mid x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

- Illustrere opdelingen af S med et *søgetræ*
- Hver knude svarer til et *delproblem* S_i

Optimal løsning til f.x. S_5: $\max\{z_{11}, z_{12}\} = \max\{6, 9\} = 9$



Figur 1: Opdeling af løsningsrum. De lyse tal svarer til ulovlige løsninger, dvs. løsningsvektorer x hvor $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j > c$.



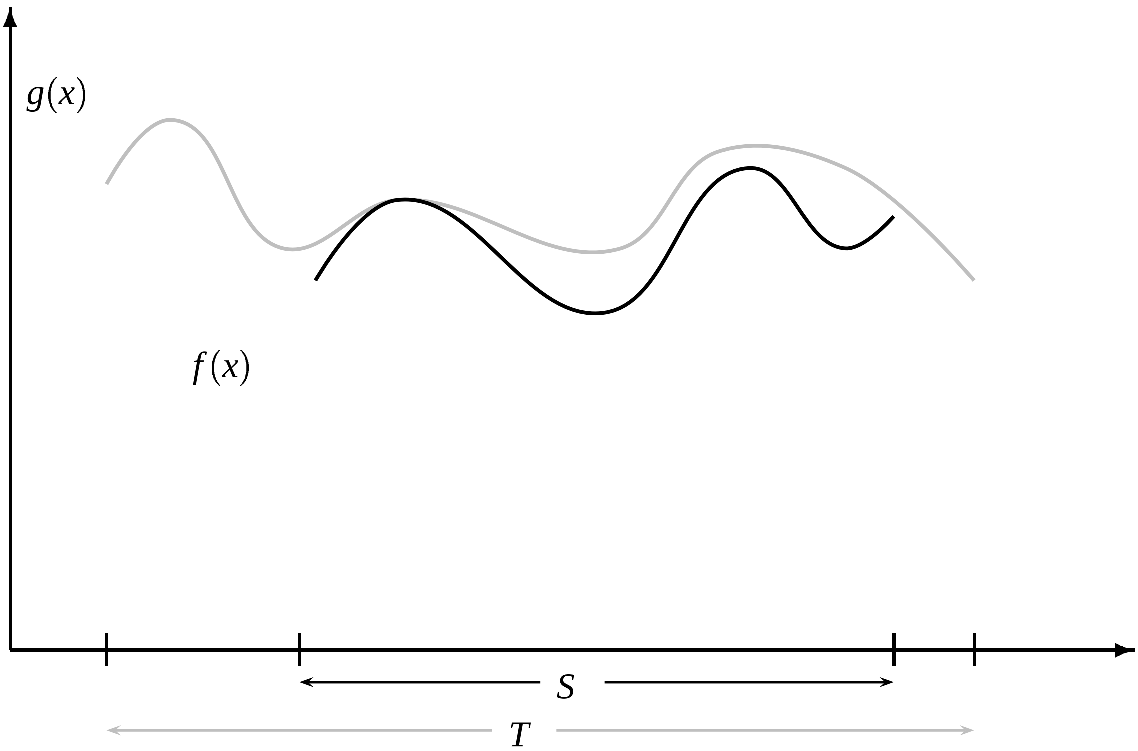
Figur 2: Søgetræ for knapsack problem. De lyse tal svarer til ulovlige løsninger, dvs. løsningsvektorer x hvor $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j > c$.

Grænseværdier

$$z = \max\{f(x) \mid x \in S\} \qquad \text{f.x. } S \text{ delproblem}$$

- *nedre grænseværdi* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$: $\mathcal{L} \leq z$
- *øvre grænseværdi* $\mathcal{U} \in \mathbb{R}$: $\mathcal{U} \geq z$

For enhver løsning $x' \in S$ er $f(x')$ nedre grænseværdi



Definition 2 $\quad P : z = \max\{f(x) \mid x \in S\}$

$$R : z_R = \max\{g(x) \mid x \in T\}$$

R er en relaksering af P hvis

(i) $S \subseteq T$

(ii) $g(x) \geq f(x)$ *for alle* $x \in S$

$\boxed{\textbf{Sætning 3}\ \textit{Hvis } R \textit{ er en relaksering af } P \textit{ så gælder } z_R \geq z.}$

Bevis

- x^* opt. løsning for P: $f(x^*) = z$
- Fra (ii) da $x^* \in S$ gælder $g(x^*) \geq f(x^*)$
- Fra (i) gælder $x^* \in T$
- $z_R = \max\{g(x) \mid x \in T\} \geq g(x^*) \geq f(x^*) = z$

Grænseværdier

- Løsning z_R til relaksering R er øvre grænseværdi $\mathcal{U}$
- Ofte kræves at relaksering kan løses effektivt

Grænseværditest

Lad $\mathcal{U}$ være øvre grænseværdi for S_i
Hvis $\mathcal{U} \leq z$ så findes ikke forbedrende løsning i S_i

Divide and conquer

$$S = S_1 \cup \ldots \cup S_k \text{ opdeling af } S$$
$$z_i = \max\{f(x) \mid x \in S_i\}$$

Sætning 4

- *$\mathcal{L}_i$ er nedre grænseværdi for delmængde S_i*
- *da er $\mathcal{L} = \max_{i=1,\ldots,k} \mathcal{L}_i$ en nedre grænseværdi for S*

Bevis Da $\mathcal{L}_i \leq z_i$ har vi $\mathcal{L} = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \mathcal{L}_i \leq \max\limits_{i=1,\ldots,k} z_i = z$

Sætning 5

- *$\mathcal{U}_i$ er øvre grænseværdi for delmængde S_i*
- *da er $\mathcal{U} = \max_{i=1,\ldots,k} \mathcal{U}_i$ en øvre grænseværdi for S*

Bevis Da $z_i \leq \mathcal{U}_i$ har vi $\mathcal{U} = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \mathcal{U}_i \geq \max\limits_{i=1,\ldots,k} z_i = z$

Sætning 6 *$f(x)$ heltallig for ethvert $x \in S$*

- *$\mathcal{U}$ er en øvre grænseværdi*
- *da er også $\lfloor \mathcal{U} \rfloor$ en øvre grænseværdi*

Knapsack problem, øvre grænseværdi

Fraktionelle knapsack problem i Cormen

$$\mathcal{U}^1_{\text{KP}} = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c,\ 0 \le x_j \le 1 \right\}$$

Originale knapsack problem

$$f(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \textstyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c, x_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Fraktionelle knapsack problem

$$g(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$T = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \textstyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c, 0 \le x_j \le 1 \right\}$$

Da $f(x) = g(x)$ er kriterium (ii) i definition 2 overholdt. Envidere er $S \subseteq T$, hvorfor kriterium (i) også er opfyldt.

Branch-and-bound

$$z = \max\{ f(x) \mid x \in S\}$$

$\mathcal{L} := -\infty$; $L := \{S\}$
while $L \neq \emptyset$
  vælg et delproblem S_i fra L
  $L := L \setminus \{S_i\}$
  if $S_i \neq \emptyset$ **then**
    find en øvre grænseværdi $\mathcal{U}(S_i)$
    find en lovlig løsning x i S_i
    if $\mathcal{U}(S_i) > \mathcal{L}$ **then**
      if $f(x) > \mathcal{L}$ **then** $\mathcal{L} := f(x)$; $x^* := x$
      opdel S_i i delproblemer $S_i^1, \ldots, S_i^k$
      tilføj delproblemerne til L, dvs. sæt
        $L := L \cup \{S_i^1, \ldots, S_i^k\}$
    endif
  endif
endwhile

- L en liste af delproblemer S_i givet ved de tilhørende løsningsrum. Listen L vil ofte være organiseret som en prioritetskø.
- Vi kalder delproblemerne i L for *åbne delproblemer*, mens deproblemer der allerede er blevet behandlet kaldes *lukkede delproblemer*.
- global nedre grænseværdi $\mathcal{L}$, tilhørende løsning x^*.

Branch-and-bound

En branch-and-bound algoritme for et maksimeringsproblem vil derfor bestå af følgende fire komponenter:

1. En *øvre grænseværdifunktion* som for et givet delproblem returnerer en øvre grænse på værdien af den bedste løsning vi kan finde i delrummet.

2. En *nedre grænseværdi* som på ethvert tidspunkt angiver den hidtil bedst kendte løsning.

3. En *søgestrategi* som fastlægger en rækkefølge for behandlingen af delproblemer.

4. En *forgreningsregel* som for alle delproblemer som ikke kan forkastes af grænseværditesten, angiver hvorledes det tilhørende løsningsrum skal opdeles. Dermed skabes to eller flere nye delproblemer.