Brudebuket

Brudebuketten skal i sagens natur være overdådig og smuk, så her må der ikke spares på noget. Bukettens skønhed kan bestemmes ved at løse følgende optimeringsproblem, hvor begrænsningerne alene er bestemt af bukettens omkreds og vægt:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

Ved tilføjelse af slack variable $s_1, s_2 \geq 0$ for de to begrænsninger, og løsning af LP-relaxeringen af problemet med Simplex algoritmen, fremkommer følgende to ligninger

$$\begin{array}{rcl} x_1 \phantom{{}+x_2} + s_1 - s_2 &=& 9 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+s_1} + \frac{1}{2}s_2 &=& \frac{3}{2} \end{array}$$

Udled et Gomory snit fra den første Simplex ligning hvori basisvariablen antager en fraktionel værdi.

S 11: Hvilken ulighed fremkommer efter eliminering af slack variablene?

11A) $x_1 + x_2 \leq \frac{5}{4}$
11B) $x_1 + x_2 \leq 1$
11C) $x_1 \leq 1$
11D) $x_1 + \frac{1}{10}x_2 \leq \frac{5}{4}$
11E) $x_1 + x_2 \leq 2$
11F) $x_2 \leq 1$

Brudens far er dog ikke tilfreds med ovenstående løsning, som kun gør brug af to slags blomster. I stedet formulerer han nogle forslag til en ny model, hvori samtlige fem af årstidens blomster indgår. Begrænsningerne i modellen er givet ved følgende matricer A_1 til A_6:

$$A_1 = \begin{pmatrix} & & & & 3 \\ & & & 3 & \\ & & 3 & & \\ & 3 & & & \\ 3 & & & & \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & & -1 & -1 \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} & 1 & & & -1 \\ & & 1 & 1 & \\ & & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} & 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 & \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & 1 & & 1 \\ -1 & & & & \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & & -1 & & 1 \\ -1 & 1 & & & \\ & 1 & & -1 & 1 \\ & & -1 & & \\ & & & \frac{1}{2} & \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & -1 \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

S 12: Netop en af matricerne er totalt unimodulær. Hvilken?

12A) Matrix A_1
12B) Matrix A_2
12C) Matrix A_3
12D) Matrix A_4
12E) Matrix A_5
12F) Matrix A_6

Bryllupsnat

Intet bryllup uden en bryllupsnat! Fra et udsøgt fransk lingerikatalog udvælger bruden en række beklædningsgenstande. Ikke overraskende kan valget af beklædningsgenstande formuleres som følgende cover problem:

$$\begin{array}{ll} 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4+9x_5 \leq 15 & (A) \\ 12x_1+8x_2+5x_3+4x_4+8x_5 \leq 15 & (B) \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \{0,1\} & \end{array}$$

S 13: Hvis man betragter ulighed (A), hvilken af følgende uligheder er *ikke* en minimal cover ulighed:

13A)	$x_1+x_3+x_4 \leq 2$	13D)	$x_1+x_3+x_5 \leq 2$
13B)	$x_4+x_5 \leq 1$	13E)	$x_1+x_2+x_5 \leq 2$
13C)	$x_1+x_2+x_3 \leq 2$	13F)	$x_1+x_2+x_4 \leq 2$

S 14: Hvis vi nu betragter ulighed (B), hvad er den største værdi af α således at begrænsningen

$$\alpha x_1+x_2+x_5 \leq 1$$

er en lovlig ulighed?

14A)	$\alpha=0$	14D)	$\alpha=3$
14B)	$\alpha=1$	14E)	$\alpha=4$
14C)	$\alpha=2$	14F)	$\alpha=5$

Rengøringsprogrammer

Farmands borddame under middagen er en stor tilhænger af rengøringsprogrammer i TV. Hun underholder hele selskabet med historier om de mest utrolige bakterier man kan finde under en tallerken, på lysekronen, eller på kanten af en lysestage. Inspireret af de bevingede ord begynder Farmand at overveje styrken af et Lagrange relaxeret problem.

Betragt følgende *minimerings* problem givet ved

$$\begin{array}{rl} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & Dx \geq d \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

hvor c og x er vektorer af længde n, b og d er vektorer af længde m, og A og D er $n \times m$ matricer. Lad z_{IP} betegne værdien af den heltals-optimale løsning til problemet, og z_{LP} betegne den optimale løsningsværdi af LP-relaxeringen.

Det Lagrange relaxerede problem er

$$\begin{aligned} \min\ & z_{LR}(\lambda) = cx - \lambda(Dx - d) \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Antag at vi løser det Lagrange duale problem

$$z_{LD} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} z_{LR}(\lambda)$$

S 15: Det vides endvidere at A er *totalt unimodulær* og at b er heltallig. Hvilket af følgende udsagn er korrekt:

15A) $z_{LD} = z_{LP} = z_{IP}$

15B) $z_{LD} \leq z_{LP} = z_{IP}$

15C) $z_{LD} \geq z_{LP} = z_{IP}$

15D) $z_{LD} = z_{LP} \leq z_{IP}$

15E) $z_{LD} = z_{LP} \geq z_{IP}$

15F) $z_{LD} \geq z_{LP} \geq z_{IP}$

Sejltur

Bryllupsfesten skal naturligvis afsluttes med en sejltur på kanalerne i Frederiksberg have. Desværre har bryllupsgæsterne spist og drukket så godt at kaptajnen er bekymret for om robåden kan kæntre. Hver båd er godkendt til at bære en samlet vægt L som ikke må overskrides. Både af hensyn til økonomien, men ikke mindst på grund af selskabeligheden, ønsker man ikke at bruge flere robåde end højst nødvendigt. Til stor glæde indser Farmand at dette er et “bin-packing problem” og kommanderer straks hele selskabet op på badevægten.

Bin-packing problemet er defineret som føler: Der er givet n personer med vægte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ samt et ubegrænset antal både (“bins”). Hver båd i kan højst bære den samlede vægt L. Problemet er at tildele alle personer til en båd således at der bruges færrest mulige både.

Hvis vi bruger den binære beslutningsvariabel u_i til at angive om båd i benyttes, og den binære variabel x_{ij} til at angive om person j kommer med båd i, kan problemet formuleres som følgende optimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \min\ & \textstyle\sum_{i=1}^n u_i \\ \text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1 \quad j = 1, \ldots, n && (1) \\ & \textstyle\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq L u_i \quad i = 1, \ldots, n && (2) \\ & u_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \ldots, n && (3) \end{aligned}$$

S 16: Vi vil anvende Dantzig-Wolfe dekomponering til at løse problemet. Lad (a_{jk}) være en matrix af alle lovlige bemandinger af en båd, hvor $a_{jk} = 1$ hvis og kun hvis person j indgår i bemanding k. Antallet af forskellige bemandinger er m. Hvad er den korrekte formulering af master problemet?

16A) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{k=1}^{m} x_k & \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \geq 1 & j = 1,\ldots,n \\ & x_k \in \{0,1\} & k = 1,\ldots,m \\ \hline\end{array}$

16B) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{k=1}^{m} x_k & \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^{m} x_k \geq 1 & \\ & x_k \in \mathbb{Z}^+ & k = 1,\ldots,m \\ \hline\end{array}$

16C) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{j=1}^{n} x_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j \geq 1 & k = 1,\ldots,m \\ & x_j \in \{0,1\} & j = 1,\ldots,n \\ \hline\end{array}$

16D) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{k=1}^{m} x_k & \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \geq 1 & j = 1,\ldots,n \\ & x_k \in \mathbb{Z}^+ & k = 1,\ldots,m \\ \hline\end{array}$

16E) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{j=1}^{n} x_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq 1 & \\ & x_j \in \{0,1\} & j = 1,\ldots,n \\ \hline\end{array}$

16F) $\begin{array}{|lll|}\hline \min & \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq 1 & k = 1,\ldots,m \\ & x_j \in \{0,1\} & j = 1,\ldots,m \\ \hline\end{array}$

Betragt følgende instans af bin-packing problemet, hvor der er givet $n = 4$ personer, og hver båd kan rumme vægten $L = 12$:

j	1	2	3	4
w_j	3	4	5	7

Følgende tabel angiver nogle forslag til lovlige bemandinger af en båd. F.eks. betyder linie $k = 5$ at personerne 1 og 2 indgår i bemandingen.

$(a_{jk}) =$

$k \backslash j$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	1	1	0	0
6	1	0	1	0
7	1	0	0	1
8	1	1	1	0
9	1	0	1	1
10	0	1	1	0
11	0	1	0	1
12	0	0	1	1

S 17: Hvilken af ovenstående bemandinger er ikke lovlig?

17A) $k = 5$

17B) $k = 6$

17C) $k = 7$

17D) $k = 8$

17E) $k = 9$

17F) $k = 10$

17G) $k = 11$

17H) $k = 12$

Efter et antal iterationer, ser “restricted master” problemet ud som følger

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & + x_8 & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & & + x_5 & + x_6 & & & \geq 1 \\
& & x_2 & & & + x_5 + & & + x_7 & & \geq 1 \\
& & & x_3 & & + x_5 + & & & + x_8 & \geq 1 \\
& & & & x_4 & & + x_6 & + x_7 & + x_8 & \geq 1 \\
& x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & , x_6 & , x_7 & , x_8 & \in \{0,1\}
\end{array}$$

Ved løsning af LP-relaxeringen, fås de duale variable: $y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = \frac{1}{3}, y_4 = \frac{2}{3}$.

S 18: Hvad er den næste lovlige bemanding (fra ovenstående tabel) som kommer med i master problemet hvis vi bruger Dantzigs regel til at vælge variablen der skal ind i basis (dvs. den variabel som har mindst reduceret omkostning vælges)

18A) $k = 5$

18B) $k = 6$

18C) $k = 7$

18D) $k = 8$

18E) $k = 9$

18F) $k = 10$

18G) $k = 11$

18H) ingen, processen terminerer

S 19: **(tekst spørgsmål)**
Lagrange-relaxer begrænsningerne (1) i den originale model, og angiv lagrange-multiplikatorernes domæne. Løs det Lagrange duale problem for den givne instans, dvs. bestem de lagrange-multiplikatorer som fører til den strammeste grænseværdi, og beregn værdien af denne.

Rabatter

Farmand, der som bekendt skal betale mad og drikke ved brylluppet, er meget opsat på at købe vinen billigst muligt. Til middagen er der behov for b_A flasker vin af type A (Gewürztraminer Grand Cru Brand 2000) og b_B flasker af type B (Rasteau, Côtes du Rhône Villages 2000).

Faderen har kig på to forhandlere som sælger de givne vine. Prisen for vin A hos forhandler i er c_A^i (kr). Tilsvarende er prisen for vin B hos forhandler i givet ved c_B^i (kr). Endvidere har de to forhandlere nogle rabataftaler:

- **forhandler 1:** Hver gang man køber 5 flasker af type A får man een flaske gratis. Der er ingen rabat på type B.
- **forhandler 2:** Hvis man køber for mere end 2000 kr vine (type A og B tilsammen) får man 300 kr kontantrabat.

Lad x_A^i angiver antal flasker A købt hos forhandler i, og tilsvarende x_B^i angiver antal flasker B købt hos forhandler i.

S 20: **(tekst spørgsmål)**
Formuler en IP-model som kan bruges til at minimere indkøbsomkostningerne.

Svar

S11: Fra ligningen

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2}s_2 = \frac{3}{2}$$

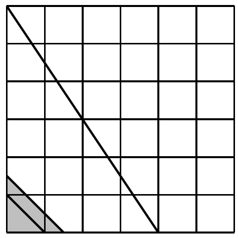
fås Gomory uligheden

$$\frac{1}{2}s_2 \geq \frac{1}{2}$$

Ved indsættelse af $s_2 = 3 - 2x_1 - 2x_2$ fås

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

Det korrekte svar er 11.b).



S12: Det korrekte svar er 12.f).

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & -1 \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Lad $P_1 = \{1, 2\}$ bestå af første og anden række. Lad $P_2 = \{3, 4, 5\}$ bestå af tredie, fjerde og femte række. Så ses det let at A_6 overholder "property P".

S13: Uligheden $x_1 + x_3 + x_5 \leq 2$ er ikke en *minimal* cover ulighed, da også $x_3 + x_5 \leq 1$ er en cover ulighed. Så det rigtige svar er 13.d).

S14: Vi har den minimale cover ulighed

$$x_2 + x_5 \leq 1$$

For at finde den største værdi af α således at uligheden

$$\alpha x_1 + x_2 + x_5 \leq 1$$

er lovlig, løser vi problemet:

$$\begin{aligned} \gamma = \ & \text{maximize } x_2 + x_5 \\ & \text{subject to } 12 + 8x_2 + 8x_5 \leq 15 \\ & \qquad x_2, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

med optimal løsning $\gamma = 0$. Så $\alpha = 1 - \gamma = 1$, og dermed er 14 b) korrekt.

S15: Siden A er totalt unimodulær, definerer begrænsningerne $Ax \geq b$ det konvekse hylster, og dermed ved vi at $z_{LD} = z_{LP}$. Da vi ikke ved om $Dx \leq d$ definerer det konvekse hylster, kan der findes instanser hvor den nedre grænseverdi z_{LD} og z_{LP} er skarpt mindre end z_{IP}. Så det korrekte svar er 15.d).

S16: Det korrekte svar er

$$\boxed{\begin{array}{lll} \min & \sum_{k=1}^{m} x_k & \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k \geq 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_k \in \{0,1\} & k = 1, \ldots, m \end{array}}$$

Så 16.a) er korrekt.

S17: Bemanding $k = 9$ som indeholder personerne $\{1,3,4\}$ er ikke lovlig da deres samlede vægt-sum er $3+5+7 = 15$. Det rigtige svar er 17.e).

S18: Alle bemandinger har ikke-negativ reduceret omkostning som det ses i følgende tabel:

k \ j	1	2	3	4	$1 - \sum_{j=1}^{n} a_{jk} y_j$
1	1	0	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2	0	1	0	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
3	0	0	1	0	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4	0	0	0	1	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
5	1	1	0	0	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
6	1	0	1	0	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
7	1	0	0	1	$1 - \frac{3}{3} = 0$
8	1	1	1	0	$1 - \frac{3}{3} = 0$
10	0	1	1	0	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
11	0	1	0	1	$1 - \frac{3}{3} = 0$
12	0	0	1	1	$1 - \frac{3}{3} = 0$

så forsinket kolonnegenererings proceduren vil terminere. Svar 18.h) er rigtigt.

S19: Hvis man anvender multiplikatorer $\lambda_j \geq 0$ bliver det Lagrange relaxerede problem

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1) & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq L u_i & i = 1, \ldots, n \\ & u_i, x_{ij} \in \{0,1\} & i, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

der kan omskrives til

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n} (u_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq L u_i & i = 1, \ldots, n \\ & u_i, x_{ij} \in \{0,1\} & i, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

der igen kan spaltes op i n identiske problemer på formen:

$$\begin{array}{lll} \min & u_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq L u_i & \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Det optimale valg af Lagrange multiplikatorer svarer til de duale variable i master problemet. Da kolonnegenereringsprocessen er termineret, kan vi derfor vælge $\lambda_1 = y_1$, $\lambda_2 = y_2$, $\lambda_3 = y_3$, $\lambda_4 = y_4$. Det ses nu at ovenstående problem har løsningsværdien 0 ved at gennemløbe samtlige lovlige bemandinger af båden. Dermed bliver den optimale løsningsværdi

$$\min \sum_{i=1}^{n} (u_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0 + \frac{5}{3}$$

S20: Lad δ^1 angive antal gratis flasker fra forhandler 1. Lad δ^2 angive om der opnås rabat hos forhandler 2.

Da kan objektfunktionen skrives som

$$\min c_A^1 (x_A^1 - \delta^1) + c_B^1 x_B^1 + c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 - 300\delta^2$$

Vi skal opfylde behovene for vin

$$\begin{array}{l} x_A^1 + x_A^2 \geq b_A \\ x_B^1 + x_B^2 \geq b_B \end{array}$$

Antal gratis flasker fra forhandler 1 er givet ved uligheden

$$x_A^1 \geq 6\delta^1, \qquad \delta^1 \in \mathbb{Z}_+$$

Rabat hos forhandler 2 er styret af

$$c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 \geq 2000 \;\Leftarrow\; \delta^2 = 1 \qquad \delta^2 \in \{0,1\}$$

Sidstnævnte implikation kan nemt lineariseres til

$$c_A^2 x_A^2 + c_B^2 x_B^2 - 2000\,\delta^2 \geq 0$$