Læsevejledning, uge 11

Oversigt

Pensum skifter noget karakter her i den resterende del af kurset. Indtil videre har vi kun beskæftiget os med forskellige *teknikker* til at løse bestemte problemer. Kapitel 34 er i modstykke til bogens øvrige emner, idet der her i højere grad er tale om *indsigt*: Vi bliver her præsenteret for en klasse af problemer som formentlig ikke kan løses effektivt, og samtidig udvikles et begrebsapparat til at vise hvornår problemer er svære. De første tre uger (11, 12 og 13) arbejdes der med hvordan man klassificerer problemer i "lette" og "svære". Herefter præsenteres nogle nye teknikker ("branch-and-bound"-paradigmet, approksimations-algoritmer og meta-heuristikker), der kan bruges til at angribe specielt umedgørlige problemer.

CLRS

Kapitel 34 starter med en uformel beskrivelse af tre interessante klasser af problemer: P, NP og NPC og deres indbyrdes forhold. Kapitlets resterende afsnit er ret tekniske, og indledningen giver en god baggrund for at holde overblikket over, hvor man er på vej hen.

Den centrale indsigt er at vi foruden en række problemer der kan løses effektivt (i polynomiel tid) også kender en lang række problemer som vi ikke kender effektive algoritmer til at løse. Det ideelle ville være om vi for sidstnævnte problemer kunne bevise at der ikke findes en effektiv algoritme til løsning af problemet. Men da ingen har haft succes med et sådant bevis, godtgør vi at en effektiv algoritme ikke findes ved at vise at et givet problem er "sværere" end en meget stor mængde af problemer (mængden af problemer hvor en løsning kan kontrolleres effektivt).

Vigtige begreber er at kontrollere ("verify") korrektheden af en given løsning ("certifikate") i polynomiel tid. Man bør også bide mærke i sammenhængen mellem afgørligheds- og optimerings-problemer og reduktioner af problemer generelt.

Afsnit 34.1 indfører klassen P af problemer, der kan løses i polynomiel tid (målt i størrelsen af inddata). For at kunne gøre dette udvikles nogle formelle rammer: Et problem defineres først som en binær relation mellem *instanser* og *løsninger*. Instanser og løsninger beskrives formelt ved hjælp at bit-strenge, således at et afgørlighedsproblem (og dets løsning) kan opfattes som en afbildning $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. Et afgørlighedsproblem, Q, kan så beskrives som et sprog, L, der består af de instanser (ord), der giver et 1-svar:

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid Q(x) = 1\}, \quad \text{hvor } \Sigma = \{0,1\}$$

Herefter kan P indføres som de sprog, L, hvorom det for alle ord $x \in \Sigma^*$ af længde n kan afgøres, om $x \in L$ eller ej i $O(n^k)$ for en konstant k.

Afsnit 34.2 indfører klassen NP, der karakteriseres af, at man kan kontrollere korrektheden af en given løsning i polynomiel tid. Intuitivt set, må det være nemmere at kontrollere en løsning end at løse et problem. Bemærk, at der ikke siges noget om hvorvidt man selv ville kunne finde løsningen i polynomiel tid.

Afsnit 34.3 indfører klassen af NP-fuldstændige problemer, NPC, som er "sværere" end alle NP-problemer. Centralt her er at alle problemer i NP kan reduceres (omtransformeres) til det givne problem i polynomiel tid.

Forelæsningerne generelt

Der er to formål med undervisningen: At strukturere stof og beviser, samt at perspektivere faget i en videnskabelig kontekst.

Førstnævnt mål opnås ved en hierarkisk gennemgang, som vekselvirker mellem konkrete eksempler og matematiske beviser: Typisk bliver problemet introduceret ved et eksempel, og de fornødne definitioner gennemgås. Herefter gennemgås algoritme eller bevis på et overordnet (måske lidt uformelt niveau) efterfulgt af den mere præcise matematiske gennemgang.

Perspektiveringen opnås ved at indplacerer stoffet i et historisk forløb, samt ved at henvise til nye forskningsresultater eller anvendelser af stoffet.

For at få størst udbytte af forelæsningerne forventes det at man har brugt 1-2 timer inden forelæsningen på at sætte sig ind i de grundlæggende definitioner, samt at have fået et skematisk overblik over kapitlet. Alle beviser gennemgås i detaljer ved forelæsningerne. Ofte vil der blive peget på et konkret eksempel, mens det formelle bevis gennemgås.

Plancherne vil være tilgængelige fra hjemmesiden mindst en dag inden hver forelæsning. De er tænkt som en hjælp til hjemmeforberedelsen, og kan endvidere bruges til notater under forelæsningen.

Forelæsningen denne uge

Efter en del motivation for at beskæftige sig med NP-fuldstændige problemer, vil der blive brugt en del tid på at indføre en formel ramme for at ressonere over problemers sværhed. Selv om formalismen kan virke tung er den nødvendig, da man uden stringente definitioner nemt kan drage fejlagtige konklusioner.

Der vil blive gennemgået begreber som: afgørlighedsproblem, effektiv kodning af inddata, afgørlighedsproblemer som sprog, accept og afgørelse af sprog. Endvidere indføres begrebet at verificere (kontrollere) en forelagt løsning, at reducere (omtransformere) et problem, samt problemklasserne P, NP, og NPC. Forelæsningen afsluttes med at vise at der findes et problem som er NP-fuldstændigt.

Efter forelæsningen skulle tilhøreren gerne være fortrolig med de anvendte begreber, samt have indset at et NP-fuldstændigt problem nødvendigvis må være svært at løse, da samtlige problemer i klassen NP effektivt kan reduceres til problemet.

Praktisk information

Planen er at G2-opgaven stilles mandag den 14 april, med afleveringsfrist onsdag 30. april. Dermed bliver der 1.5 uge (+ en uge påskeferie) til at løse opgaven.

Kursusbog 1 er udkommet, og kan købes i førstedelen. Den skal dog først bruges i uge 14.

Opgaver

34.1-1

34.1-2

34.1-4

34.1-6

34.2-1

34.2-2

34.2-4

34.2-6

34.2-8

34-3 a), b)