26-1 $\star\star\star$

Vi betragter et $n \times n$-gitter af ikke-orienterede kanter, hvorpå der er placeret m knuder. Vi skal prøve at finde knude-disjunkte veje for alle disse m knuder ud til (et vilkårligt sted på) randen.

a)

Vi betragter et netværk, hvor knuderne også er tilknyttet en kapacitet. Flow i et sådant netværks kan omformuleres til et almindeligt flow-problem (knuderne har ingen kapacitets-begrænsning), ved at opdele alle knuder i to: en ind-knude og en ud-knude, der så er forbundet med en kant med kapacitet svarende til den oprindelige knudes begrænsning. Indgående kanter til den oprindelige knude vil således være indgående til ind-knuden, mens udgående kanter fra den oprindelige knude vil være udgående fra ud-knuden.

b)

- Alle knuder og kanter tildeles kapacitetet 1
- Gitteret omtransformeres som beskrevet i a)
- Alle start-knuder forbindes direkte til kilden, s
- Alle rand-knuder forbindes direkte til afløbet, t

Hvis det maksimale flow er det samme som antallet af startknuder, m, går det godt.

Køretid Det oprindelige gitter indeholder n^2 knuder og ialt $2n(n-1)$ ikke-orienterede kanter. Idet hver kant erstattes af to orienterede kanter (en i begge retninger) fås $4n(n-1)$ kanter. Opdelingen af hver knude i to giver anledning til n^2 nye knuder og kanter, således at der ialt haves $2n^2$ knuder og $4n(n-1)+n^2$ kanter. Afslutningsvis forbindes s til de m "indespærrede" knuder ligesom alle $4n-4$ randknuder forbindes til t. Samlet set haves altså

$$
\begin{aligned}
|V| &= 2n^2 \\
|E| &= 4n(n-1) + n^2 + m + 4n - 4
\end{aligned}
$$

Køretiden for Ford-Fulkerson er $O((E+V)|f^*|)$, hvor $|f^*|$ er værdien af det maksimale flow. I dette tilfælde vil $|f^*|$ være begrænset af antallet af rand-knuder, dvs. $|f^*| \leq 4n-4$. Algoritmens samlede køretid vil derfor være $O(n^3)$.

26-3 $\star\star\star$

Vi betragter $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ eksperimenter med profit $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ og $I = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ instrumenter med omkostninger $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Eksperiment E_j skal bruge instrumenterne $R_j \subseteq I$.

a)

Hvis snittet (S,T) skal have endelig kapacitet, må det ikke skære knuder fra S til T med kapacitet ∞. Hvis $E_j \in T$ må derfor også $I_k \in T$ for alle $k \in R_j$.

På denne måde sikrer man sig altså, at alle de instrumenter, man skal bruge til et givent eksperiment, kommer med. Med andre ord vil et snit over en (s, I_k)-kant betyde, at instrument I_k medtages, mens et snit over en (E_j, t)-kant betyder, at eksperiment E_j ikke har alle nødvendige instrumeter til rådighed og derfor ikke kan udføres.

Kapaciteten af snittet vil dermed svare til

1. omkostningerne af de medtagne instrumenter samt
2. profitterne af de ikke udførte eksperimenter

b)

For ethvert snit med endelig kapacitet $c(S,T)$ kan kapaciteten iflg. a) skrives som

$$c(S,T) = \sum_{i \in \tilde{I}} c_i + \sum_{j \in \tilde{J}} p_j, \quad \tilde{I} \subseteq T,\ \tilde{J} \subseteq S$$

Fortolkes $\tilde{I}$ som de instrumenter, der medtages, og $\tilde{J}$ som de eksperimenter, der ikke foretages, vil udbyttet være givet ved

$$\sum_{k \in J \setminus \tilde{J}} p_k - \sum_{i \in \tilde{I}} c_i = \sum_{k \in J} p_k - \sum_{j \in \tilde{J}} p_j - \sum_{i \in \tilde{I}} c_i = \sum_{k \in J} p_k - \left(\sum_{j \in \tilde{J}} p_j + \sum_{i \in \tilde{I}} c_i \right) = \sum_{k \in J} p_k - c(S,T)$$

For at finde det *største* udbytte skal man altså bestemme det *mindste* snit (Fortolkning: minimering af omkostninger *og* tabt fortjeneste).

c)

For at kunne afgøre hvilke instrumenter der skal medtages, og hvilke eksperimenter der ikke skal udføres, skal vi altså finde det mindste snit. Vi ved, at kapacitetet af det mindste snit svarer størrelsen af det største flow. Når vi har fundet det største flow, f, vil vi kunne konstruere det mindste snit ved (ligesom i beviset for "max-flow min-cut"-sætningen) at lade S være de knuder i I og E, der kan nås fra s i G_f.

Køretid Bruger vi Edmonds-Karp, er det interessante, hvor mange gange en kant kan være kritisk: Kanterne (s, I_k) og (E_j, t) kan hver især kun være kritiske én gang. Kanterne (I_k, E_j) vil aldrig være kritiske, da de har kapacitet ∞. Tilbage er kanterne (E_j, I_k); disse vil højst kunne være kritiske halvdelen af gange (jvf. beviset for sætning 26.9). Da der ialt er $m + n + 2$ knuder, vil køretiden for bredde-først-søgningen være $O(m + n)$, og den samlede køretid vil kunne skrives som

$$O(\underbrace{(m+n)}_{\text{BFS}} \underbrace{(m+n)r}_{\text{kritiske kanter}}) = O((m+n)^2 r)$$

hvor $r = \sum_{j=1}^{m} |R_j|$.

26-5 ⋆⋆⋆

Vi betragter et netværk $G = (V, E)$ med heltallige kapaciteter $c(u, v)$ og sætter $C = \max_{(u,v) \in E} c(u, v)$.

a)

I værste fald skæres alle $|E|$ kanter, der hver især højst kan have en kapacitet på C. Kapaciteten af et minimum-snit vil derfor højst kunne være $|E|C$.

b)

Man udfører bredde-først-søgning, hvor man kun betragter kanter med kapacitet $\geq K$; det tager $O(E)$.

c)

Selv om K hele tiden vil være en heltallig potens af 2, bliver K i sidste ende 1 hvilket sikrer, at det maksimale flow i sidste ende vil kunne bestemmes.

d)

Når linie 4 udføres, er K lige blevet halveret (bortset fra første gang). Der vil dermed ikke være nogen veje i restgrafen, hvorpå alle kanter har kapacitet $\geq 2K$. I værste fald vil alle kanter skæres, hvorfor kapacitet af et mindste snit højst vil kunne være $2K|E|$.

e)

Hvert gennemløb tilføjer et flow på K. Fra d) ved vi, at det maksimale flow højst er $2K|E|$ (kapaciteten af det mindste snit), hvoraf det kan konkluderes, at `while`-løkken udføres $O(E)$ gange.

f)

Iflg. b) kan vi finde en ny vej i $O(E)$. K vil antage $\lg C$ forskellige værdier, der hver giver anledning til $O(E)$ nye veje iflg. e). Ialt fås dermed en køretid på $O(E^2 \lg C)$.