25-2 ⋆⋆⋆

Vi betragter ϵ-tætte grafer, dvs. grafer $G = (V, E)$ hvor $|E| = \Theta(V^{1+\epsilon})$.

a)

Vi betragter en d-hob med n elementer. For $d = n^\alpha$ vil $\log_d n = \log_{n^\alpha} n = \frac{1}{\alpha}$

	d	$\Theta(n^\alpha)$	Fib
INSERT	$O(\log_d n)$	$O(\frac{1}{\alpha})$	$O(1)$
EXTRACT-MIN	$O(d \log_d n)$	$O(\frac{n^\alpha}{\alpha})$	$O(\lg n)$
DECREASE-KEY	$O(\log_d n)$	$O(\frac{1}{\alpha})$	$O(1)$

b)

Vi sætter $d = V^\epsilon$ og kører Dijkstra: $|V|\times$EXTRACT-MIN + $|E|\times$DECREASE-KEY = $O(V\frac{V^\epsilon}{\epsilon} + E\frac{1}{\epsilon}) = O(E)$

c)

Vi kører Dijkstra som i b) for hver knude: $O(VE)$.

d)

Overspringes da Johnsons algoritme ikke er pensum!

26.1-4 ⋆⋆

Bevis for lemma 26.1:
Lad $G = (V, E)$ være et netværk og f et flow i G. Da vil

1. $\forall X \subseteq V : f(X, X) = 0$
   $f(X, X) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} f(x, y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} -f(y, x) = -f(X, X)$, hvoraf det kan konkluderes, at $f(X, X) = 0$.

2. $\forall X, Y \subseteq V : f(X, Y) = -f(Y, X)$
   Som i 1.

3. $\forall X, Y, Z \subseteq V, X \cap Y = \emptyset$:
   $$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$$
   $$f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$$
   $f(X \cup Y, Z) = \sum_{x \in X \cup Y} f(x, Z) = \sum_{x \in X} f(x, Z) + \sum_{y \in Y} f(y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$
   $f(Z, X \cup Y) = -f(X \cup Y, Z)$

26.1-6 ⋆⋆

For netværket $G = (V, E)$ betragter vi to funktioner $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}_+$ og definerer summen

$$(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v), \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

Under antagelse af at f_1 og f_2 er flow-funktioner på G, vil summens flow-egenskaber være som følger:

Kapacitets-begrænsning: Ikke overholdt: Hvis f.eks. $f_1(u, v) = f_2(u, v) = c(u, v)$, vil $(f_1 + f_2)(u, v) = 2c(u, v)$.

Skæv-symmetri: Overholdt, da

$$(f_1+f_2)(u,v) = f_1(u,v)+f_2(u,v) = -f_1(u,v)-f_2(u,v) = -(f_1(u,v)+f_2(u,v)) = -(f_1+f_2)(u,v)$$

Flow-bevarelse: Overholdt, da for alle $u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\sum_{v \in V}(f_1+f_2)(u,v) = \sum_{v \in V} f_1(u,v)+f_2(u,v) = \sum_{v \in V} f_1(u,v) + \sum_{v \in V} f_2(u,v) = 0+0 = 0$$

Det er altså kun kapacitets-begrænsningen, der overskrides (og det er derfor, man indfører rest-grafer til at bestemme flow i Ford-Fulkerson).

26.2-1 $\star\star$

Flow regnes begge veje over et snit, mens kapaciteten kun regnes den ene. Netværket fra figur 26.1(b) vil derfor have

$$f(\{s,v_2,v_4\},\{v_1,v_3,t\}) = 11+1-4+7+4 = 19$$
$$c(\{s,v_2,v_4\},\{v_1,v_3,t\}) = 16+4+7+4 = 31$$

26.2-2 $\star\star$

Max-flow er 23 svarende til kapaciteten af det mindste snit $c(\{s,v_1,v_2,v_4\},\{v_3,t\}) = 12+7+4$.

26.2-8 $\star\star$

Antag, at f er et max-flow på $G=(V,E)$. Hvis $|f|>0$, vil der findes en kant (u,v), med $f(u,v) = \min\{f(a,b) \mid f(a,b) > 0\}$. Denne kant vil dermed også ligge på en vej fra s til t, hvorpå den vil være begrænsende ("flaskehals"). Idet der tilføjes flow langs denne vej, fås en ny graf, hvis max-flow vil være 0 på den pågældende kant (og dermed på en kant mere end før). Dette kan oplagt højst gøres $|E|$ gange.

26.3-1 $\star\star$

Knuderne i L og R vil parvis blive forbundet som $(1,6)$, $(2,8)$ og $(3,7)$.