

34.4-5

Vi skal se, at problemet med at afgøre om der findes en lovlig tildeling af variable, som opfylder et udtryk på disjunktiv normalform, kan løses i polynomiel tid.

Disjunktiv normalform består af disjunktioner af klausuler, der selv består af konjunktioner:

$$(\dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots) \vee \dots \vee (\dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots)$$

For at gøre udtrykket sandt, skal vi altså bare kunne opfylde mindst én af klausulerne. En klausul kan imidlertid kun være sand, hvis alle de indgående variable er sande. Dette kan undersøges i lineær tid i antallet af variable, n , og/eller klausuler, k : $O(n + k)$.

34.4-6

Under antagelse af, at $\text{SAT} \in \text{P}$, skal vi i polynomiel tid finde en tildeling af de indgående variable x_1, \dots, x_n , som opfylder et givent udtryk, ϕ .

Indledningsvis undersøges om udtrykket ϕ overhovedet kan opfyldes. Kan det det, bestemmes tildelingene ved forsøgsvis at fastlåse de enkelte variable på en given værdi efter tur. Først forsøges med $x_1 = 1$: Ved hjælp af SAT undersøges om $\phi(x_1, \dots, x_n) = \phi(1, x_2, \dots, x_n)$ kan opfyldes. Hvis det er tilfældet fastholder vi $x_1 = 1$; ellers må $x_1 = 0$. Herefter prøves med $x_2 = 1$: Det undersøges om $\phi(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(\bar{x}_1, 1, \dots, x_n)$ kan opfyldes (\bar{x}_1 er den tidligere fundne værdi for x_1). Sådan fortsættes indtil alle variable er tildelt en værdi.

Hvis $\text{SAT} \in \text{P}$, er køretiden polynomiel i længden af inddata, $O(|x|^k)$. Da $n \leq |x|$, vil den samlede køretid være $nO(|x|^k) = O(|x|^{k+1})$, der oplagt stadig er polynomiel.

34.5-1

Vi skal se, at “del-graf isomorfi”-problemet er NP-fuldstændigt.

$$\text{SUB-GRAPH-ISOMORPHISM} = \left\{ \langle G_1, G_2 \rangle \mid \begin{array}{l} G_1 \text{ er isomorf med en del-grafer af } G_2 : \\ f : V_1 \rightarrow V_2 \text{ injektiv} \\ (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2 \end{array} \right\}$$

1. $\text{SUB-GRAPH-ISOMORPHISM} \in \text{NP}$: Et certifikat i form af afbildningen f vil kunne kontrolleres i $O(V_1 + E_1)$, hvilket oplagt er polynomiel i størrelsen af inddata $\langle G_1, G_2 \rangle$.
2. Vi forsøger at reducere fra $\text{CLIQUE} \in \text{NPC}$:

$$\forall L \in \text{NP} : L \leq_{\text{pol}} \text{CLIQUE} \leq_{\text{pol}} \text{SUB-GRAPH-ISOMORPHISM}$$

3. For en given instans $\text{CLIQUE}\langle G, k \rangle$ konstruerer vi en fuldstændig graf med k knuder, G_k , og betragter efterfølgende instansen $\text{SUB-GRAPH-ISOMORPHISM}\langle G_k, G \rangle$.
4. Antag, at der i G findes en klike af størrelse mindst k (med mindst k knuder). Da en klike er en fuldstændig delgraf, vil G_k dermed være isomorf med en delgraf af G .
Hvis der modsat *ikke* findes en klike af størrelse k i G , vil G_k ikke være isomorf med nogen som helst del-graf af G .
5. Transformationen af en instans af CLIQUE til en instans af $\text{SUB-GRAPH-ISOMORPHISM}$ består hovedsagelig i konstruktion af den fuldstændige graf G_k . Denne kan konstrueres i $O(k^2)$, idet den har k knuder og $\frac{k(k-1)}{2}$ kanter. Da $k \leq |V|$ (hvor V er mængden af knuder i G), vil køretiden oplagt være polynomiel i størrelsen af inddata $\langle G, k \rangle$.

34.5-5

Vi skal se, at “mængde-delings”-problemet er NP-fuldstændigt.

$$\text{SET-PARTITIONING} = \left\{ \langle S \rangle \mid \frac{S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathbb{N}}{\exists A \subset S : \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S \setminus A} x} \right\}$$

1. SET-PARTITIONING \in NP: Et certifikat i form af mængden A vil kunne kontrolleres i $O(n)$, hvilket oplagt er polynomielt i størrelsen af inddata $\langle S \rangle$.
2. Vi forsøger at reducere fra SUBSET-SUM \in NPC:

$$\forall L \in \text{NP} : L \leq_{\text{pol}} \text{SUBSET-SUM} \leq_{\text{pol}} \text{SET-PARTITIONING}$$

3. For en given instans SUBSET-SUM $\langle S, t \rangle$ konstruerer vi elementet $x_{n+1} = 2t - \sum_{x \in S} x$ og mængden $S' = S \cup \{x_{n+1}\}$; efterfølgende betragtes instansen SET-PARTITIONING $\langle S' \rangle$.
4. Antag, at der i S findes en delmængde A , så $\sum_{x \in A} x = t$. Summen af de resterende elementer i S' vil dermed være givet ved

$$\sum_{x \in S' \setminus A} x = \sum_{x \in S'} x - \sum_{x \in A} x = 2t - t = t$$

hvoraf det fremgår, at den ønskede opdeling eksisterer i S' .

Uanset hvilken opdeling af S' i to lige store dele (mht. summen af elementerne), der betragtes, vil x_{n+1} kun kunne ligge i den ene del. Den anden del vil dermed udelukkende bestå af oprindelige elementer fra S , hvis sum tilsammen giver t .

5. Transformationen af en instans af SUBSET-SUM til en instans af SET-PARTITIONING består hovedsagelig i konstruktion af elementet x_{n+1} . Dette kan gøres i lineær tid i antallet af elementer i S , dvs. $O(n)$.

34.5-6

Vi skal se, at “hamilton-vej”-problemet er NP-fuldstændigt.

$$\text{HAM-PATH} = \left\{ \langle G, u, v \rangle \mid \frac{G = (V, E)}{u, v \in V, u \neq v} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{\exists p : u \overset{H}{\rightsquigarrow} v}$$

1. HAM-PATH \in NP: Et certifikat i form af en vej, p , vil kunne kontrolleres i lineær tid i grafens størrelse.
2. Vi forsøger at reducere fra HAM-CYCLE \in NPC:

$$\forall L \in \text{NP} : L \leq_{\text{pol}} \text{HAM-CYCLE} \leq_{\text{pol}} \text{HAM-PATH}$$

3. For en given instans HAM-CYCLE $\langle G \rangle$ oprettes en ny graf $G' = (V', E')$ ved at tilføje en kopi af en knude u (med dertilhørende kanter), således at kopien, \tilde{u} , er forbundet til grafen på nøjagtig samme måde som u :

$$(u, v) \in E \Leftrightarrow (\tilde{u}, v) \in E'$$

Herefter betragtes instansen HAM-PATH $\langle G', u, \tilde{u} \rangle$.

4. Antag, at der i G findes en hamilton-kreds og betragt knuden u . En af u 's to incidente kanter i kredsen, vil da kunne udskiftes med en kant til \tilde{u} , og således give anledning til en hamilton-vej fra u til \tilde{u} i G' .

Antag, at der i G' findes en hamilton-vej fra u til \tilde{u} og at kanten (v, \tilde{u}) indgår i vejen. Da kan (u, v) ikke indgå i vejen (med mindre grafen kun indeholder tre knuder). Erstatte (v, \tilde{u}) af kanten (v, u) fås en kreds bestående af alle de oprindelige knuder i G .

Hvis G' består af tre knuder, vil G bestå af to knuder, hvormed der ikke vil være en hamilton-kreds i G .

5. Transformationen af en instans af HAM-CYCLE til en instans af HAM-PATH består hovedsagelig i tilføjelsen af knuden \tilde{u} . Dette kan gøres i lineær tid i grafens størrelse.