34.2-9

Vi skal se, at P$\subseteq$ co-NP. Det kommer ud på, at der for alle $L \in$ P gælder, at $\overline{L} \in$ NP. Dette følger imidlertid af, at P er lukket under komplement; jvf. 34.1-6.

34.2-10

Vi skal se, at hvis NP $\neq$ co-NP, så vil P $\neq$ NP. Antag at NP $\neq$ co-NP, og at P $=$ NP. Da P er lukket under komplement, dvs. P $=$ $\overline{\text{P}}$, følger så NP $=$ P $=$ $\overline{\text{P}}$ $=$ $\overline{\text{NP}}$ $=$ co-NP, hvilket er i modstrid med antagelsen.

34.3-3

Vi skal se, at $L \leq_{\text{pol}} \overline{L} \Leftrightarrow \overline{L} \leq_{\text{pol}} L$. Da både 0- og 1-instanser transformeres korrekt, vil

$$L \leq_{\text{pol}} \overline{L} \Leftrightarrow \overline{L} \leq_{\text{pol}} \overline{\overline{L}} = L$$

som ønsket.

34.3-6

Vi siger, at et sprog L er *fuldstændigt* for en klasse C, hvis der for alle $L' \in C$ gælder, at $L' \leq_{\text{pol}} L$. $\emptyset$ kan ikke være fuldstændigt for P, da 1-instanser fra L' ikke kan afbildes over i noget. Ligeledes vil $\{0,1\}^*$ heller ikke kunne være fuldstændigt for P, da det ikke er muligt at afbilde 0-instanser fra L' over i noget. Alle andre sprog vil have både 0- og 1-instanser, der kan afbildes over i. Bemærk, at vi ikke udtaler os om afbildningens *udseende*, men blot om dens *eksistens*.

34.3-7

Vi skal se, at $L \in$ NPC $\Leftrightarrow \overline{L} \in$ (co-NP)C. Antag, at $L \in$ NPC. Det kommer ud på, at

$$\forall L' \in \text{NP} : L' \leq_{\text{pol}} L$$

Betragter vi de komplementære sprog vil

$$\forall \overline{L'} \in \text{co-NP} : \overline{L'} \leq_{\text{pol}} \overline{L}$$

som ønsket.

34.4-4

Vi skal se, at TAUTOLOGI er fuldstændigt for co-NP. Fra 34.3-7 vides, at det er ensbetydende med, at $\overline{\text{TAUTOLOGI}}$ $\in$ NPC. Imidlertid er $\overline{\text{TAUTOLOGI}}$ = NON-SAT $\in$ NPC (jvf. 34.2-8), hvoraf det ønskede følger.

34-3

c)

$$\text{3-COLOUR} = \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G = (V,E) \text{ ikke-orienteret} \\ c : V \to \{1,2,3\} \\ \hline c(u) \neq c(v),\ \forall (u,v) \in E \end{array} \right\}$$

3-COLOUR $\in$ NPC $\Rightarrow$ GRAPH-COLOURING $\in$ NPC:
Det følger af, at 3-COLOUR$\langle G \rangle$ = GRAPH-COLOURING$\langle G, 3 \rangle$.

d)

Med henblik på at vise, at 3-COLOUR $\in$ NPC ved at reducere fra 3-CNF-SAT skal vi sikre os, at hver variabel enten er 0 eller 1, og at dens negation har den modsatte værdi. Den sidste del klares ved at forbinde knuderne x, $\neg x$ og RØD til hinanden; farvningen af en sådan delgraf vil nemlig tvinge alle knuderne til at have forskellige farver. På denne måde vil man altså kunne sikre sig, at alle knuder hørende til en variabel har en anden farve end knuden hørende til variablens negation. For at kunne afgøre værdien (farven) af en variabel (knude) skal vi søge for, at alle knuderne har en farve som svarer til enten 0 eller 1. Dette gøres ved at oprette en 0- og en 1-knude, som forbindes til knuden RØD på samme måde som knuderne hørende til en variabel og dens negation. Hermed sikres for alle variabler, x, at $\{c(x), c(\neg x)\} = \{c(0), c(1)\}$ i en tre-farvning af grafen.