Bevis for STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS

Som hjælp til beviset for STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS gennemgås her hovedtrækkene.

Beviset føres ved induktion efter antallet af træer i det andet DFS-gennemløb, der jo foretages på den transponerede graf, G^T. For et givent k godtgør vi, at hvert af de første k DFS-træers knuder i sig selv udgør en sammenhængende komponent.

Induktionsstart

Her er $k = 0$. Dermed er der endnu ikke fundet nogen træer, hvorfor udsagnet oplagt er sandt.

Induktionsantagelse

Antag, at DFS-gennemløbet på den transponerede graf indtil videre har resulteret i k træer, hvis knuder hver især udgør en sammenhængende komponent.

Vi betragter nu det $(k + 1)$'te træ, og betegner roden af dette træ u. Da alle knuder ligger i en eller anden sammenhængende komponent, kan vi antage, at u ligger i den sammenhængende komponent C.

Vi vil gerne frem til, at u samt alle de underliggende knuder i DFS-træet præcis er de samme knuder som udgør C:

Induktionstrin

Først viser vi, at *alle* knuder i C ligger i det DFS-træ, hvor u er rod:

Da vi udfører det andet DFS-gennemløb på knuderne i *aftagende* rækkefølge efter deres sluttid f i det første DFS-gennemløb, vil $f[u]$ være den største sluttid blandt alle knuderne i C. Eksistensen af en knude i C med *større* sluttid ville nemlig betyde, at vi allerede havde undersøgt denne knudes sammenhængende komponent, hvilket er i modstrid med, at u er rod i DFS-træet (jvf. induktionsantagelsen). Herudover vil $f[u]$ også være større end sluttiderne for alle de knuder, der ligger i endnu ubesøgte sammenhængende komponenter.

Da u er knuden med den største sluttid fra det første DFS-gennemløb, vil u altså besøges først blandt alle knuderne i C. På det tidspunkt hvor u besøges første gang, vil alle de resterende knuder i C derfor være ubesøgte; disse knuder vil dermed befinde sig i det til u underliggende træ (der jo er det $(k + 1)$'te DFS-træ), da der inden for C er en vej mellem alle par af knuder.

Herefter viser vi, at der *ikke* er nogen knuder *uden for* C med i det til u underliggende træ:

Det kommer ud på, at alle kanter ud af C går tilbage til allerede besøgte knuder (og dermed også komponenter). G og G^T har oplagt de samme sammenhængende komponenter. For alle *udgående* kanter (u, v) fra C i G^T, vil der medmed have været en *indgående* kant (v, u) til C i G. Det betyder imidlertid, at sluttiden for v i DFS-gennemløbet af G må være *større* end den tilsvarende for u. I forhold til det andet DFS-gennemløb betyder det, at v må ligge i en *allerede* besøgt sammenhængende komponent, da disse besøges i rækkefølge efter aftagende sluttid.

Konklusionen er altså, at det præcis er knuderne i C, der udgør DFS-træet med rod i u.