DAT2A opgaver i branch-and-bound

7. april 2003

Indledning

I de seneste år er det danske marked for radiotelefoni eksploderet. Teleselskaberne investerer milliarder i etablering af radiostationer, nedgravning af lyslederkabler samt bortgivning af mobiltelefoner.

Et nyt fransk teleselskab (Obelix) ønsker at etablere sig i landet. Virksomheden vil dog udnytte sin investerede kapital bedst muligt, samtidig med at risikoen begrænses. Sidstnævnte forhold betyder at Obelix maksimalt vil investere c kroner i projektet.

Obelix kan opstille radiaomaster i en række byer i landet. De n mest interessante byer udvælges, og der gennemføres en nøje analyse af hver radiomasts fordele og ulæmper. En radiomast j koster et givet beløb w_j at etablere, hvor prisen er temmelig svingende fra by til by. Enhver radiomast vil i sig selv give et vist afkast p_{jj} men de store penge skal hentes på telefoni mellem byerne. I sagens natur kan Obelix kun tjene penge på en samtale mellem to byer hvis der er en radiomast i begge byer. Ellers må samtalen sælges til et anden teleselskab. Da mængden af samtaler mellem byerne på forhånd kan estimeres, vil Obelix opnå den årlige fortjenesten $p_{ij} + p_{ji}$ på samtaler mellem by i og j. Denne fortjeneste opnås dog kun hvis der er en radiomast i begge byer. Vi antager at antallet af samtaler i begge retninger er ens, således at $p_{ij} = p_{ji}$.

Idet vi indfører beslutningsvariable $x_j \in \{0,1\}$ til at angive om en radiomast bygges eller ej, kan vi formulere problemet som følgende kvadratiske knapsack problem (QKP):

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_i x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c \\
& x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{1}$$

hvor objektfunktionen angiver at mest muligt profit ønskes, mens knapsack begrænsningen betyder at der ikke må bruges flere penge til etableringen end den given grænse c. Det antages normalt at alle værdier af p_{ij} og w_j er heltal.

Obelix betragter i første omgang blot et lille problem hvor syv af Danmarks største byer indgår. De givne data ser ud som følger, idet alle tal er i millioner kroner.

$_i \, ^j$		1	2	3	4	5	6	7
p_{ij}	1	8	9	4	3	3	4	7
	2	9	7	1	2	6	3	9
	3	4	1	8	4	7	5	4
	4	3	2	4	1	0	3	7
	5	3	6	7	0	2	4	0
	6	4	3	5	3	4	8	9
	7	7	9	4	7	0	9	5
w_j		2	7	8	9	5	3	9

$n = 7$, $c = 20$.

Den optimale løsning er at bygge radiomaster i byerne $1,2,5,6$ hvilket giver en profit på 83 millioner pr. år.

Knapsack Problem

Det "normale" knapsack problem (KP) kan formuleres som

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n. \end{array} \tag{2}$$

Se evt. Cormen s. 382 for detaljer.

Opgave 1 Vis at det kvadratiske knapsack problem (1) er NP-hårdt ved reduktion fra det normale knapsack problem. ■

Løsning af det fraktionelle knapsack problem

Det fraktionelle knapsack problem (hvor det er tilladt at medtage brøkdele af genstande) kan løses i polynomiel tid ved brug af den grådige metode, som beskrevet i Cormen s. 382. Først sorteres elementerne efter aftagende effektivitet $e_j = p_j / w_j$ således at

$$e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq \ldots \geq e_n \tag{3}$$

hvorpå rygskækken fyldes grådigt: Elementerne $1,2,3,\ldots$ lægges i rygsækken indtil man støder på det første element b, som ikke kan tilføjes til rygsækken. Løsningen er da at de første $b-1$ elementer medtages ($x_j = 1$ for $j = 1,\ldots,b-1$) mens en brøkdel af genstand b medtages så rygsækken bliver helt fuld:

$$x_b = \frac{c - \sum_{j=1}^{b-1} w_j}{w_b}$$

Ingen af genstandene efter b medtages ($x_j = 0$ for $j = b+1,\ldots,n$). Det fraktionelle knapsack problem kan dermed løses i $O(n \log n)$ tid, hvor den tungeste beregning er sorteringen (3).

Opgave 2 Vis at det fraktionelle knapsack problem kan løses i $O(n)$ tid. (Hint: udnyt at man kan finde medianen af effektiviteterne i lineær tid). ■

Øvre grænseværdi for QKP

Vi vender nu tilbage til det kvadratiske knapsack problem. Da problemet er NP-hårdt ønsker vi at udvikle en branch-and-bound algoritme. Til dette formål skal vi bruge nogle grænseværdier. En øvre grænseværdi kan udledes i to skridt.

1 Først udledes en øvre grænseværdi $\overline{p}_j$ på hver radiostations profit.

2 Dernæst udledes en øvre grænseværdi for hele projektet ved at benytte hver radiostations grænseværdi $\overline{p}_j$.

Profitten af radiostation j ikke kan blive bedre end værdien af følgende maximeringsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \overline{p}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{array} \tag{4}$$

En øvre grænseværdi u_1 for hele problemet (1) kan dernæst kan findes som

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & u_1 = \sum_{j=1}^{n} \overline{p}_j x_j \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n. \end{array} \tag{5}$$

For eksemplet fra introduktionen betyder ovenstående at vi først finder en øvre grænseværdi (4) for hver af de syv radiostationers nytteværdi. Hvert af disse problemer er et ”normalt”knapsack problem defineret ved en søjle af profitterne fra (p_{ij}) matricen. For at udlede $\overline{p}_1$ løser vi problemet

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \overline{p}_1 = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 7x_7 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 9x_7 \leq 20 \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n. \end{array}$$

Den optimale grænseværdi er $\overline{p}_1 = 25$. Tilsvarende findes $\overline{p}_2 = 27$, $\overline{p}_3 = 24$, $\overline{p}_4 = 14$, $\overline{p}_5 = 20$, $\overline{p}_6 = 25$ og $\overline{p}_7 = 29$. For at finde den øvre grænseværdi for hele problemet løser vi

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & u_1 = 25x_1 + 27x_2 + 24x_3 + 14x_4 + 20x_5 + 25x_6 + 29x_7 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 9x_7 \leq 20 \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n. \end{array}$$

som har løsningen $u_1 = 101$. Denne grænseværdi ligger altså en del over den optimale løsning på 83.

Opgave 3 Vis korrektheden af grænseværdi u_1. ■

Opgave 4 Udled køretiden for grænseværdi u_1 hvis man bruger dynamisk programmering til at løse problemerne (4) og (5). ■

Polynomiel grænseværdi for QKP

En hurtigere grænseværdi u_2 for (1) kan udledes ved at løse de fraktionelle versioner af knapsack problemerne (4) og (5). Ganske vist vil man for hvert problem kunne komme til at overestimere den forventede profit, men der opnås stadig en lovlig øvre grænseværdi.

Opgave 5 Udled køretiden for grænseværdien u_2 ved brug af store-O notation. ■

Branch-and-bound algoritme for QKP

Vi vil nu konstruere en branch-and-bound algoritme til løsning af problemet (1). I hvert skridt forgrener vi på beslutningsvariablen x_n således at det tilbageværende problem herefter har størrelse $n-1$. Dermed kan algoritmen skitseres som:

QUADKNAP(P, d, n)
    if $d < 0$ **then return**
    if $P > z^*$ **then** $z^* \leftarrow P$; $x^* \leftarrow x$
    if $n = 0$ **then return**
    find grænseværdi u af tilbageværende problem.
    if $u + P > z^*$ **then**
        $x_n \leftarrow 1$; QUADKNAP$(P + p_{nn}, d - w_n, n-1)$
        $x_n \leftarrow 0$; QUADKNAP$(P, d, n-1)$

Også i denne algoritme angiver d den tilbageværende kapacitet, mens P angiver profitten af de allerede valgte genstande. I den skitserede algoritme skal man endvidere modificere (p_{ij}) matricen hver gang en variabel x_n sættes til 1.

Opgave 6 Beskriv hvorledes (p_{ij}) matricen skal modificeres afhængigt af om der forgrenes på $x_n = 1$ eller $x_n = 0$. Beskriv også hvorledes matricen skal retableres, når der returneres fra et kald. ■

Opgave 7 For hver af de to grænseværdier u_1 og u_2 beregn i O-notation hvor lang tid det tager at behandle en branching-knude. Dette omfatter både græseværdiberegning, modifikation af matricen (p_{ij}), og alle øvrige operationer. ■