

Introduktion til optimering og operationsanalyse

David Pisinger, Efterår 2002

Dette er den tredje obligatoriske opgave på kurset “Introduktion til optimering og operationsanalyse”. Opgaven skal afleveres senest 10 december 2002 kl. 12.00 i DIKU’s 1. delsadministration. Besvarelsen skal udarbejdes i grupper på en til tre deltagere.

Læs venligst hele opgaven igennem inden du går igang, specielt noterne vedr. valg af MIP-løser til sidst.

Indledning

Det første stor-skala optimeringsproblem som blev løst i operationsanalysen var et kostplanlægningsproblem. I 1939 formulerede Stigler [2] en model for hvorledes en voksen mand billigst muligt kunne brødfødes således at han fik den fornødne mængde energi, vitaminer og mineraler. Modellen blev løst i 1947 ved at ni kontorfolk arbejdede i tilsammen 120 arbejdsdage med hånd-drevne mekaniske regnemaskiner for at finde den LP-optimale løsning. Den optimale basis løsning blev bestemt til, at en voksen mands behov for føde kan dækkes med 0,1087 \$ pr. dag (1947 priser). Denne optimale løsning blev i en lang årrække benyttet i USA i offentlige budgetter og i skolars madplanlægning [3].

Ifølge en artikel [1] fra 2001 i det anerkendte tidsskrift *Operations Research* ville de årlige madudgifter i dagens tal vokse fra 39,69 \$ til 466,69 \$, hvilket svarer til 1,2786 \$ dagligt.

Slankemad

I moderne kostplanlægning (i den industrialiserede verden), er det sjældent et problem at dække de daglige energibehov. Til gengæld vil man ofte have en øvre grænse på det tilladte antal kalorier, samtidig med at smagsoplevelsen skal blive størst mulig. Følgende tabel er hentet fra *Den lille levnedsmiddeltabel* [4].

brød	×10 kJ	smag
100g franskbrød	117	4
100g mørkt rugbrød	99	5
100g knækbrød	174	7
50g fladbrød	84	6

ost	×10 kJ	smag
20g brie 45+	24	4
20g emmentaler 45+	32	6
20g havarti	25	7
50g kvark 5+	14	5

mælk	×10 kJ	smag
2dl skummetmælk	30	5
2dl letmælk	41	7
2dl sødmælk	53	8

pålæg	×10 kJ	smag
50g leverpostej	57	6
20g rullepølse	24	1
20g rg. svinefilet	9	5
20g salami	43	4
100g sylte	92	7

frugt	×10 kJ	smag
100g fersken	21	5
200g grapefrugt	19	4
200g mandarin	21	6
150g vindruer	27	8
200g æble	24	5
200g agurk	10	3

En voksen person skal planlægge sin frokost. Personen skal vælge netop et produkt fra hver af kategorierne brød, ost, mælk, pålæg, frugt, således at smagsoplevelsen bliver størst mulig. Personen ønsker at indtage max. 2500 kJ til sin frokost.

Opgave 1 Formuler problemet som et heltalsprogrammeringsproblem, og løs det ved brug af CPLEX eller GAMS. ■

Yoghurt problem

En uheldig persons menu består af 30 forskellige bægre yoghurt. Hver kategori i menuen svarer til det pågældende bæger yoghurt, og der er to valgmuligheder svarende til om det pågældende bæger spises eller ej. Hvert bæger yoghurt har en tilhørende energimængde e_j og smag s_j . Da der ikke er meget forskel på smagsindtrykket sættes det til $s_j = e_j + k$, hvor e_j afspejler mængden af yoghurt og k er en konstant der svarer til glæden ved at åbne et nyt bæger yoghurt. Personen må indtage en energimængde givet ved en konstant b .

Dermed kan modellen omformes til et såkaldt stærkt korreleret knapsack-problem, der har formen:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} && z_1 = \sum_{j=1}^n (e_j + k)x_j \\
 &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n e_j x_j \leq b \\
 &&& x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{1}$$

Opgave 2 Det er velkendt fra litteraturen at knapsack-problemer af ovenstående form er utroligt svære at løse. Brug GAMS eller CPLEX til at løse følgende instans af et stærkt korrelerede knapsack-problem:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
s_j	12	14	16	18	20	22	24	18	18	26	12	14	16	18	20	22	24	18	18	26	12	14	16	18	20	22	24	18	18	57
e_j	2	4	6	8	10	12	14	8	8	16	2	4	6	8	10	12	14	8	8	16	2	4	6	8	10	12	14	8	8	47

I instansen sættes b til 75. Angiv antal branch-and-bound knuder (nodes) som CPLEX eller GAMS bruger, og noter hvilken MIP-løser du brugte. ■

Løsning af yoghurt problemet

Opgave 3 For at gøre løsningen af instansen nemmere tilføjes en (extended) cover-ulighed. Angiv det maksimale antal yoghurt bægre c personen må indtage ialt.

$$\sum_{j=1}^{30} x_j \leq c$$

■

Opgave 4 Hvad er den største værdi af α således at følgende ulighed er gyldig for alle lovlige løsninger til problemet (1)

$$\sum_{j=1}^{29} x_j + \alpha x_{30} \leq c$$

■

Opgave 5 Tilføj den fremkomne ulighed til modellen. Det fremkomne knapsack-problem med to begrænsninger er fortsat ikke trivielt at løse (prøv evt. at løse modellen med CPLEX eller GAMS). I stedet Lagrange-relaxeres cover-uligheden ved brug af en multiplikator λ . Nedskriv den fremkomne model, samt domænet af λ . ■

Opgave 6 Betragt LP-relaxeringen af problemet. Den duale variabel svarende til cover-uligheden betegnes y_2 . Et fornuftigt valg af λ er at sætte denne til y_2 . Bestem λ . ■

Opgave 7 Med det givne valg af λ fremkommer ved Lagrange-relaxering en heltalsmodel som ønskes løst til optimalitet med CPLEX eller GAMS. Angiv antal branch-and-bound knuder i søgetræet, samt anvendte MIP-løser. Er den fremkomne løsning en øvre eller nedre grænseværdi (eller måske begge dele?) for det originale problem fra opgave 2? ■

Noter

Da opgaven har til formål at give et indtryk af at selv simple problemer kan være svære at løse med en MIP-løser, er det vigtigt at der bruges en MIP-løser af god kvalitet ved besvarelse af opgaven. Det anbefales at bruge CPLEX eller XPRESS i opgave 2 og 7, men eksperimenter gerne med andre løserer for at se hvor stor forskel der er.

Valg af MIP-løser

Med GAMS følger MIP-løserne OSL, XA, XPRESS og ZOOM. I den professionelle version af GAMS installeret på DIKU og IMF benyttes MIP-løseren CPLEX. Man vælger MIP-løser ved at tilføje `mip=XXX` til option-linjen af GAMS-dokumentet. Så f.eks.

```
option iterlim=999999999,reslim=300,optcr=0.0,optca=0.0;
```

bliver til

```
option iterlim=999999999,reslim=300,optcr=0.0,optca=0.0,mip=XPRESS;
```

Arbejdslager

Med nogle af løserne kan det være nødvendigt at øge den tilladte brug af arbejdslager. Har man kaldt sin GAMS-model for `knapsack` tilføjes linjen:

```
knapsack.workspace=10;
```

Hvilket reserverer 10 Mb. til MIP-løseren.

Litteratur

- [1] S.G. Garille, S.I. Gass (2001) "Stigler's diet problem revisited", *Operations Research*, **49**, 1–13.
- [2] G. Stigler (1945) "The cost of subsistence", *Journal of Farm Economy*, **25**, 303–314.
- [3] National Research Council (1989) "Recommended Dietary Allowances", 10th edition, National Research Council Press, Washington DC.
- [4] E. Saxholt, S. Fagt, A. Møller, B.E. Mikkelsen "Den lille levnedsmiddeltabel", Ministeriet for Fødevarer, Landbrug og Fiskeri. Fødevaredirektoratet. www.vfd.dk/publikationer/publikationer/publikationer/levntabel/