Opgaver til Introduktion til optimering og operationsanalyse uge 41

26. september 2002

Opgave 1 (Mat-øk eksamen sommer 1996)

En virksomhed kan inden for en periode producere 4 varer, som hver yder et dækningsbidrag. De skal alle gennemgå 3 processer (Benævnt A, B og C), som hver har en begrænset tidskapacitet til produktion af de 4 varer inden for perioden. Varerne kræver forskellige procestider. Procestider (i timer pr. vareenhed) og dækningsbidrag (i tusinde kroner pr. vareenhed) samt tidskapacitet (i timer) fremgår af tabel 1.

Spørgsmål 1.1

Opstil en lineær programmeringmodel til bestemmelse af en produktion, som maksimerer det samlede dækningsbidrag under hensyn til begrænset tidskapacitet. Anfør tillige det duale problem.

Spørgsmål 1.2

Undersøg om det vil være optimalt at producere enheder af vare nr. 1, 2 og 3, men ikke af vare 4 idet det anføres at

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Vare nr.	1	2	3	4	
Dækningsbidrag	10	9	8	10	Tidskapacitet
Proces A	3	2	4	1	160
Proces B	3	1	2	3	95
Proces C	2	3	1	4	130

Tabel 1: (til opgave 1)

	Tidskapacitet
Proces A	3
Proces B	9
Proces C	12

Tabel 2: (til opgave 1.3)

Anfør i bekræftende fald det optimale antal producerede enheder af hver vare og den tilhørende løsning i det duale problem.

Virksomheden overvejer at leje et antal maskiner til at udvide tidskapaciten på processerne med. Udvidelsen (i timer) pr. lejet maskine fremgår af tabel 2

Omkostningerne ved leje i den betragtede periode andrager 31 (tusinde kr) pr. maskine.

Spørgsmål 1.3

Kan det betale sig at leje 1 stk. maskine? Kan det betale sig også med en evt. højere leje? I bekræftende fald anføres en øvre grænse for lejen.

Spørgsmål 1.4

Det besluttes at leje 5 maskiner á 31 tusinde kr. Bestem den optimale produktion. (Det er nok med en pivotering. Der ses endvidere bort fra manglende heltallighed i antallet af producerede vareenheder). Kan det betale sig at leje alle 5 maskiner? Kan det betale sig at leje flere?

Opgave 2

Lad (P) være et lineært minimeringsproblem på formen "min Cx under bibetingelserne $Ax \geq B$", og

$$\begin{aligned} C^t &= \begin{pmatrix} -18 & 7 & -12 & -5 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & -7 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -1 & -2 \\ -8 & 3 & -5 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -8 & -7 & 1 & -3 \\ -5 & -2 & 3 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ned fra himlen er dalet X_0, hvor

$$X_0^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vis at X_0 er en optimal løsning til (P),

Vink: Man kan bruge Complementary Slackness. Betingelserne fra Complemtary Slackness Theorem giver et lineært ligningssystem med ubekendte $y_1, \ldots, y_m$. Dette ligningssystem har forhåbentlig netop én løsning. (Hvorfor forhåbentlig?) Brug løsningen!

Opgave 3 (Følsomhedsanalyse)

Vi betragter et standard minimeringsproblem (P). Vi antager at (P) har en optimal løsning X_0. Det duale problem $(P*)$ har da også en optimal løsning Y_0. Hvorfor? Sammen med (P) betragter vi også familien af "pertuberede"problemer:

$$\begin{array}{ccr} & \min & C^t X \\ (P_T) & \text{ub.}: & AX \geq B + T, \\ & & X \geq 0, \end{array}$$

hvor $T^t = (t_1, \ldots, t_m)$. Vi vil interessere os for ændringer i den optimale værdi $C^t X_0$ når (P) erstattes med (P_t). Vi antager følgende er opfyldt:

> Der findes $\epsilon > 0$, således at Y_0 er optimal løsning til alle (P_T^*) med $|t_i| < \epsilon$ for $i = 1, \ldots, m$.

Bevis at ændringen i den optimale værdi er $T^t Y_0$ når $|t_i| < \epsilon$ for $i = 1, \ldots, m$.

Opgave 4

Minimér :

$$-2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 15x_5$$

under bibetingelserne

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 10x_5 & \geq & 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 6x_5 & \geq & 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. & & \end{array}$$

Løs det duale problem grafisk og løs derefter det primale problem.